# ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

## I. Introduction

Une **équation différentielle** est une équation dont la solution est une fonction.
Par exemple, dans l'équation 5y'+3y = 2 on cherche quelle est la fonction qui vérifie cette équation.
Généralement, il y a plusieurs solutions à chaque équation.
Une équation différentielle relie une fonction et ses dérivées successives $F(x, y, y', y'', y^{(n)}) = 0$

Les solutions d'une équation différentielle sont appelées le **flot**.
La plupart des équations différentielles ne sont pas résolvables de manière analytique

Les équations différentielles ont plusieurs utilités :
- Modéliser les oscillations d'une pendule, d'un ressort, d'une corde, …
- Modéliser les circuits électriques
- Estimer un taux de réactivité (demi-vie, …)
- Dater au carbone 14
- Modéliser des systèmes complexes (modèle proies-prédateurs, …)

## II. Équation différentielle du premier ordre

Une équation différentielle est du premier ordre si la fonction y est dérivée une seule fois
*Soit E un espace vectoriel normé complet sur R. On appelle ED1 une équation de la forme $y' = f(x, y)$, où f est une application continue sur un ouvert U de R × E à valeurs dans E.*
*On appelle solution de cette équation une application φ dérivable sur un intervalle I de R à valeurs dans E telle que, pour tout point x de I, $(x, \phi(x))$ appartienne à U et que : $\phi'(x) = f(x, \phi(x))$*
*Ces paragraphes sont les définitions mathématiques mais ne tombent pas tel quel. Apprenez surtout le reste*

### 1. ED 1 sans second membre

Une ED 1 sans second membre est de la forme y'+ay = 0 (E) avec a un réel quelconque

Une ED 1 sans second membre à **toujours** une solution. Cette équation a notamment comme solution évidente y=0
Une ED 1 a en fait une infinité de solution mais une seule solution passant par un point donné de type (a,b)

Une solution de l'équation différentielle y' = ay est $\boldsymbol{Ce^{ax}}$ *Avec C ∈ $\mathbb{R}$ une constante qu'on ne cherche pas à calculer*
On obtient ce résultat grâce à la méthode de séparation des variables

**/!\ Une solution de l'ED y'+ay = 0 est $Ce^{-ax}$. Attention aux signes des solutions**

Exemple : 5y'+3y = 0

1. On met sous la forme y' = ay. 5y' = -3y
2. On trouve a. y' = $-\frac{3}{5}$ y donc a = $-\frac{3}{5}$
3. On remplace a dans la formule $Ce^{-\frac{3}{5}x}$

Si on fixe des contraintes (x=2 et y=4 par exemple) cela limite beaucoup le nombre de solution

## 2. ED 1 avec second membre

Une ED1 avec second membre est de la forme y'+ay = b (E') avec a et b des réels quelconques

*On dit que cette équation est avec second membre car b n'est pas lié à la fonction y ou à une de ses dérivées*

Une ED 1 avec second membre a toujours une solution notamment $y_0 = -\frac{b}{a}$

Une solution de l'équation différentielle y' = ay + b est $\boldsymbol{Ce^{ax} - \frac{b}{a}}$

C'est la somme de l'équation sans second membre et d'une solution particulière $y_0 = -\frac{b}{a}$

Exemple : 2y' + 6y = 4

1. On met sous la forme y' = ay + b. 2y' = - 6y + 4
2. On trouve a et b. y' = -3y + 2 donc a = -3 et b = 2
3. On remplace dans la formule $Ce^{-3x} + \frac{2}{3}$

## 3. ED 1 avec une fonction en second membre

Lorsque le second membre est une fonction on utilise la méthode de variation de la constante suivie d'une intégration

*Le prof vous met des théorèmes mais ça m'étonnerait que ça tombe. C'est trop long pour pouvoir le faire à l'examen*

Théorème 1 :

**Théorème :** (Equation différentielle $y' + a(x)y = b(x)$)
Soient $a, b \in \mathcal{C}(I, K)$, $A$ une primitive de $a$ sur $I$, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$.
Il existe une unique solution sur $I$ de l'équation $y' + a(x)y = b(x)$ telle que $y(x_0) = y_0$ ; elle est définie par :

$$\forall x \in I, y(x) = y_0 e^{A(x_0)-A(x)} + \int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)-A(x)}dt.$$

Théorème 2 :

**Théorème :** (Equation différentielle $y' + a(x)y = b(x)$, solutions générale et particulière)
Soient $a, b \in \mathcal{C}(I, K)$, $A$ une primitive de $a$ sur $I$, $\bar{y}$ une solution particulière de l'équation $y' + a(x)y = b(x)$ sur $I$. Soit de plus $y$ une fonction dérivable sur $I$. Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) $y' + ay = b$ sur $I$.
(ii) Il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que, sur $I$, on ait

$$\underbrace{y}_{\text{solution générale de l'équation avec second membre}} = \underbrace{\bar{y}}_{\text{solution particulière}} + \underbrace{\lambda e^{-A}}_{\text{solution générale de l'équation homogène}}$$

En d'autres termes, si on connaît une solution particulière de l'équation $y' + a(x)y = b(x)$, alors on en connaît toutes les solutions.

**À retenir : solution générale = solution générale ED homogène + solution particulière**

Exemple : y' – y = (x+1) $e^x$

1. On cherche une solution générale de l'équation homogène : y'- y = 0 : c'est une ED1 sans second membre : une solution est de la forme C$e^x$
2. On cherche une solution particulière. On propose : y = $(\frac{x^2}{2} + x)\ e^x$, on va regarder si cette fonction vérifie l'équation y' – y = (x+1) $e^x$
3. On dérive $(\frac{x^2}{2} + x)\ e^x$, de la forme (uv)' = u'v + uv'. y' = $(x+1)\ e^x + \left(\frac{x^2}{2} + x\right) e^x$
4. On remplace dans l'équation : y' – y = $(x+1)\ e^x + \left(\frac{x^2}{2} + x\right) e^x - ((\frac{x^2}{2} + x)\ e^x)$

   = $xe^x + e^x + \frac{x^2}{2}e^x + xe^x - \frac{x^2}{2}e^x - xe^x$ = $xe^x + e^x$
5. On compare le résultat obtenu à l'équation de base : y' – y = (x+1) $e^x$ = $xe^x + e^x$
6. On additionne la solution particulière qu'on a trouvé à une solution générale de l'équation homogène : (x+1) $e^x$ + C$e^x$ = (x+1+C) $e^x$
   Une solution générale de l'équation avec second membre est (x+1+C) $e^x$

# III. Équation différentielle du second ordre

Une équation différentielle est du second ordre si y est dérivé 2 fois (y'')

1. <u>ED homogène (sans second membre)</u>

Une ED 2 homogène est de la forme ay'' + by' + cy = 0 *avec a ≠ 0*

On associe cette équation à un polynôme caractéristique a$X^2$ + bX + c = 0
On peut calculer son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

a. $\Delta$>0

On calcul les racines du polynôme $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

Les solutions sont de la forme $C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$

*Attention à ne pas confondre c du polynôme caractéristique et C les constantes de la solution*

Exemple : 2y'' + 4y' + y = 0, on considère $\sqrt{8}$ = 3 (pour simplifier les calculs)

1. On calcul $\Delta$ = 16 – 4*2*1 = 8
2. On calcul les racines r₁ = $\frac{-4+\sqrt{8}}{2*2}$ = - $\frac{1}{4}$ $r_2$ = = $\frac{-4-\sqrt{8}}{2*2}$ = - $\frac{7}{4}$
3. On remplace dans la formule : $C_1e^{-\frac{1}{4}x} + C_2e^{-\frac{7}{4}x}$

b. $\Delta = 0$

On calcul la racine du polynôme $\frac{-b}{2a}$

Les solutions sont de la forme $(C_1x + C_2)e^{rx}$

Exemple : 2y'' + 4y' + 2y = 0

1. On calcul $\Delta = 16 - 4*2*2 = 0$
2. On calcul la racine r = $\frac{-4}{2*2}$ = - 1
3. On remplace dans la formule : $(C_1x + C_2)e^{-x}$

c. $\Delta < 0$

On calcul les 2 racines complexes conjuguées $\frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

On trouve alors 2 racines complexes conjuguées r ± iw

*<u>Point tut</u> : dans la formule, on met i $\sqrt{-\Delta}$ car on ne peut pas prendre la racine de quelque chose de négatif. On prend donc la racine de -Δ (>0) et on rajoute i (un nombre complexe) pour signifier que $\sqrt{-\Delta}$ qu'on a calculé n'existe pas réellement.*

Les solutions sont de la forme $(C_1\sin(wx) + C_2\cos(wx))e^{rx}$

Exemple : 2y'' + 4y' + 6y = 0, on considère $\sqrt{32}$ = 6

1. On calcul $\Delta = 16 - 48 = -32$
2. On calcul les racines composées $r_{1 \text{ et } 2} = \frac{-4 \pm i\sqrt{32}}{2*2} = -1 \pm i\,\frac{3}{2}$
3. On trouve r et w. Ici r = -1 et w = $\frac{3}{2}$
4. On remplace dans la formule : $(C_1\sin(\frac{3}{2}x) + C_2\cos(\frac{3}{2}x))e^{-x}$

*Tout ce qu'on vient de voir traduit en langage mathématique*

- **Cas réel** ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

  1. Si $\underline{\Delta > 0}$, soient $r_1$ et $r_2$ les racines (réelles) distinctes de $aX^2 + bX + c$. Les solutions réelles de $ay'' + by' + cy = 0$ sont alors toutes les fonctions $\boxed{x \mapsto \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
  2. Si $\underline{\Delta = 0}$ , soit $r$ l'unique racine de $aX^2 + bX + c$. Les solutions réelles de $ay'' + by' + cy = 0$ sont alors toutes les fonctions $\boxed{x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{rx}}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
  3. Si $\underline{\Delta < 0}$, soient $r + i\omega$ et $r - i\omega$ les racines (complexes conjuguées) distinctes de $aX^2 + bX + c$. Les solutions réelles de $ay'' + by' + cy = 0$ sont alors toutes les fonctions $\boxed{x \mapsto (\lambda \sin(\omega x) + \mu \cos(\omega x))\, e^{rx}}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, que l'on peut aussi mettre sous la forme $x \mapsto \lambda \sin(\omega x + \phi)e^{rx}$ ou $x \mapsto \lambda \cos(\omega x + \phi)e^{rx}$, $\lambda, \phi \in \mathbb{R}$.

Si de plus une condition initiale de la forme $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$ est fixée, avec $x_0 \in I$ et $y_0, y_1 \in \mathbb{K}$, alors la valeur des constantes est fixée. L'équation avec condition initiale possède une unique solution.

*La même chose mais les constantes sont des nombres complexes et pas des nombres réels*

**Théorème :** (Equation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$)
Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 0$. On appelle polynôme caractéristique de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$ le polynôme $aX^2 + bX + c$. Notons $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

- **Cas complexe** ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

1. Si $\underline{\Delta \neq 0}$, soient $r_1$ et $r_2$ les racines distinctes de $aX^2 + bX + c$. Les solutions complexes de $ay'' + by' + cy = 0$ sont alors toutes les fonctions $\boxed{x \mapsto \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$.
2. Si $\underline{\Delta = 0}$ , soit $r$ l'unique racine de $aX^2 + bX + c$. Les solutions complexes de $ay'' + by' + cy = 0$ sont alors toutes les fonctions $\boxed{x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{rx}}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

2. <u>ED avec second membre</u>

*Si on fixe un $x_0$, il n'existe qu'une seule solution à l'équation*

**Théorème :** (Equation différentielle $ay'' + by' + cy = d(x)$)
Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$ (avec $a \neq 0$), $d \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$, $x_0 \in I$ et $y_0, y_1 \in \mathbb{K}$. Il existe une unique solution sur $I$ de l'équation $ay'' + by' + cy = d(x)$ telle que $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$.

*Comme pour les ED1 : solution générale = solution particulière + solution générale ED homogène*

**Théorème :** (Equation différentielle $ay'' + by' + cy = d(x)$)
Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$ (avec $a \neq 0$), $d \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ et $\bar{y}$ une solution particulière de l'équation $ay'' + by' + cy = d(x)$ sur $I$. Soit de plus $y : I \to \mathbb{K}$ une application deux fois dérivable sur $I$. Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) $ay'' + by' + cy = d$ sur $I$.
(ii)

$$\underbrace{y}_{\text{solution générale de l'équation avec second membre}} = \underbrace{\bar{y}}_{\text{solution particulière}} + \underbrace{\tilde{y}}_{\text{solution générale de l'équation homogène}}$$

En d'autres termes, si on connaît une solution particulière de l'équation $y' + a(x)y = b(x)$, alors on en connaît toutes les solutions.

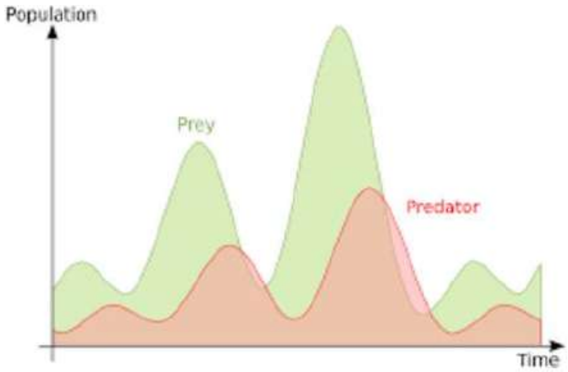
## IV. Modèles en équation différentielles

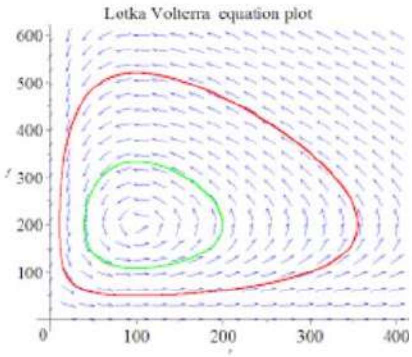
1. <u>Modèle de Lotka – Volterra</u>

Le modèle « proie-prédateur » ou de Lokta-Volterra est un couple d'équations différentielles non linéaires du premier ordre *(il y a x*y au milieu donc ce n'est pas linéaire)*. Ce modèle est utilisé pour modéliser la dynamique de systèmes biologiques dans lesquels un prédateur et sa proie interagissent. On ne peut pas résoudre la 1ère équation sans la 2ème et inversement.

Dans ce système, t désigne le temps, x(t) l'effectif des proies, y(t) l'effectif des prédateurs, x'(t) et y'(t) les variations des populations au cours du temps, α le taux de reproduction des proies, β le taux de mortalité des proies, δ le taux de reproduction des prédateurs et γ le taux de mortalité des prédateurs.

On obtient le système suivant : $\begin{cases} x'(t) = x(t)(\alpha - \beta y(t)) \\ y'(t) = y(t)(\delta x(t) - \gamma) \end{cases}$




On ne peut pas résoudre ce système de manière analytique, on va donc dessiner les solutions.

2. Modèle Verhulst

Il a proposé de modéliser la dynamique de la population, le cycle de vie d'une innovation, …
C'est une équation non linéaire. L'évolution de la population est fonction de la population et de la population au carrée. *(C'est un peu comme un effet boule de neige, notamment lors d'une épidémie)*

Ce problème se modélise par une équation différentielle de la forme : $\begin{cases} y(0) = y_0 \\ y' = ry(1 - \frac{y}{K}) \end{cases}$

Pour résoudre cette équation, il faudrait faire un changement de variable : on pose $z = \frac{1}{y}$
On obtient : $z' = rz\left(1 - \frac{1}{kz}\right) = rz - \frac{r}{k}$
Donc $z' = rz - \frac{r}{k}$ soit une ED 1 avec second membre

**FIN**