Récap Variables Aléatoires

COMPLÉMENT DE COURS

Variable Aléatoire

Définition du cours ➔ épreuve menant à des évènements élémentaires qui sont des nombres

Autrement dit :
c'est un **NOMBRE** correspondant à l'issue d'un évènement (ou d'une série d'évènements).

➔ Nombre variable dans les lois de probabilité

➔ Peut être discret (X) ou continu (x)

Expérience de Bernoulli

- expérience aléatoire dont l'issu se traduit soit par un « succès » soit par un « échec ».
    - $\mathbf{P(X = k) = p^k q^{(k-1)}}$
- **Moyenne :** $\mu = \mathrm{p}$
- **Variance :** $\sigma^2 = \mathrm{p}(1 - \mathrm{p}) = \mathrm{pq}$

Tips Expérience de Bernoulli

A regarder dans l'énoncer:

→On réalise l'épreuve qu'une seule fois

Au moment de faire le calcul

- → $\mathbf{P}(\boldsymbol{X} = \mathbf{1}) = \boldsymbol{p}$
- → $\mathbf{P}(\boldsymbol{X} = \mathbf{0}) = \boldsymbol{q}$

Loi Binomiale

- **épreuves répétées de Bernoulli**

$$\mathrm{P}(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{k}) = \boldsymbol{C_n^k p^k q^{n-k}}$$

- **Moyenne** : $\mu = \mathrm{np}$
- **Variance** : $\sigma^2 = \mathrm{npq}$

Tips Loi Binomiale

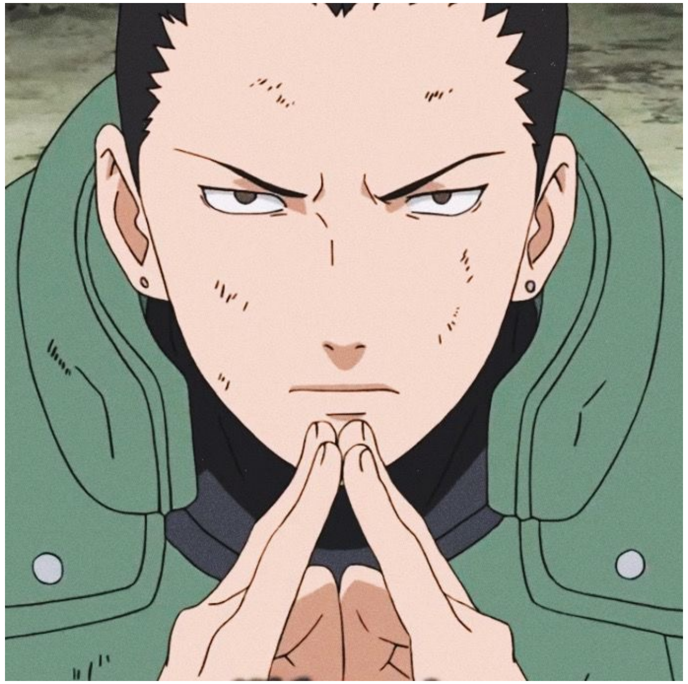
- Dans l'énoncé:

➔Des expérience avec « échec » et « réussite »

➔On répète ces expériences n fois

➔On veut voir combien de chances on a d'avoir k réussites

PENSER A SIMPLIFIER LA COMBINAISON



Loi de Poisson

- λ : taux moyen
- k: nombre de fois où l'on s'attend à ce que l'évènement se produise

$$\mathrm{P}(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

- **Moyenne et Variance :** $\mu = \sigma^2 = \lambda$

Tips Loi de Poisson

- Dans l'énoncé:

➔ On va avoir un taux moyen: par unité de temps (heure, minute etc) ou de quantité etc. ➔ indique le λ

➔ ADAPTER le λ à la situation particulière :

- ➔ **exemple: j'ai 2 patients par heure et je regarde pour 4h combien de patients arrivent → $\lambda = 2x2 = 4$**

➔ Le k sera le nombre de fois où l'évènement se produit dans l'intervalle de temps:

- ➔ **exemple : probabilité que 2 patients arrivent en n heures → k = 2**

Loi Géométrique

- nombre d'essais nécessaires jusqu'à la réalisation du premier succès

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{k}) = \boldsymbol{pq}^{\boldsymbol{k-1}}$$

- **Moyenne :** $\mu = 1/p$
- **Variance :** $\sigma^2 = \frac{1 - \mathrm{p}}{\mathrm{p}^2}$

Tips Loi géométrique

- Ce qu'on cherche dans l'énoncé:

➔On va vous demander la probabilité d'avoir (k–1) échecs avant d'avoir une réussite

➔Ici aussi on vous parlera d'une expérience avec comme issue « échec » ou « réussite »

- Soit une population de N individus parmi lesquels D ont un caractère donné. On prélève un échantillon de taille n, sans remise, soit au fur et à mesure soit d'un seul coup. On l'utilise dans la conception de plans d'échantillonnage pour le contrôle de réception.
- **X** : variable aléatoire du nombre d'individus possédant le caractère étudié parmi l'échantillon

$$\boldsymbol{P(X=k)=\frac{C_D^k \times C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}}$$

- **Moyenne :** $\mu = \frac{nD}{N} = np$
- **Variance :** $\sigma^2 = \frac{nD}{N} \times \frac{N-D}{N} \times \frac{N-n}{N-1} = \frac{N-n}{N-1} \times npq$

Tips Loi Hypergéométrique

- Dans l'énoncé:

→ Bien noter quel nombre correspond à quoi (c'est facile de s'embrouiller) → N n et D k

→ Noter la formule avant de remplacer par les nombres

Variables aléatoires continues

- Différence avec les variables aléatoires discrètes → définies sur R

→On va prendre des intervalles de valeurs au lieu d'en prendre une seule

→*l'aire sous la courbe de cette fonction entre deux points est la probabilité de notre variable aléatoire continue* → nécessite des calculs d'intégrales supra complexes

→$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$ avec **F(x)** → **Fonction de répartition**

Tips

Vous saurez si votre variable est discrète ou continue :

Soit en fonction de quelle loi vous aurez à utiliser

Soit on vous le dira clairement dans l'énoncé

Loi Exponentielle

- Elle est utilisée pour décrire un processus de mortalité dans lequel le « risque instantané » (ou taux de défaillance) de décès est constant (durée de vie de composants ou d'équipements)
- λ : taux de défaillance instantané

$$\boldsymbol{f(x) = \lambda e^{-\lambda x}}$$

$$\boldsymbol{F(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}}$$

- **Espérance :** $\mu = 1/\lambda$
- **Variance :** $\sigma^2 = 1/\lambda^2$

Tips Loi exponentielle

- Dans l'énoncé :

➔ Bien chercher si on parle de taux de défaillance ou de défaillance instantannée

➔ On vous parlera de l'apparition d'un évènement qui peut survenir à n'importe quel moment, de type : décroissance radioactive, survenue de décès dans une grande population, taux d'élimination d'une bactérie lors d'une stérilisation etc.

Loi Uniforme

- toutes les issues ont la même probabilité

$$f(x) = 1/(b-a)$$

$$f(x) = 0 \; si \; x \notin [a, b] \; avec \; x \geq 0$$

➔ <u>**Espérance :**</u> *μ=a+b/2*

➔ <u>**Variance :**</u> *σ2=b-a2/12*

Loi Normale

- La densité de probabilité d'une variable aléatoire normale de moyenne μ et d'écart type σ est symétrique autour de μ et a deux points d'inflexion aux abscisses $\mu - \sigma$ et $\mu + \sigma$

Les phrases à connaître par ❤️

- Il y a **10/100** chances pour que $X < \mu - 1,65\sigma \ ou\ X > \mu + 1,65\sigma$
- Il y a **5/100** chances pour que $X < \mu - 1,96\sigma \ ou\ X > \mu + 1,96\sigma$ (la plus utilisée dans les tests statistiques)
- Il y a **1/100** chances pour que $X < \mu - 2,58\sigma \ ou\ X > \mu + 2,58\sigma$
- Il y a **1/1000** chances pour que $X < \mu - 3,30\sigma \ ou\ X > \mu + 3,30\sigma$

💕**FAIRE LE LIEN AVEC LA NOTION D'INTERVALLE DE CONFIANCE DANS STAT DESCRIPTIVE** 💕

Loi Normale Centrée réduite

- Loi normale de moyenne 0 et de variance 1

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$