



# **Probabilités élémentaires et dénombrement**

**PAR ADELOSINE TP**

# SOMMAIRE :

**INTRO AUX  
STATS**

**01**

**02**

**DEFINITION ET  
NOTATION**



PARIS 2024



**DENOMBREMENTS**

**03**

**04**

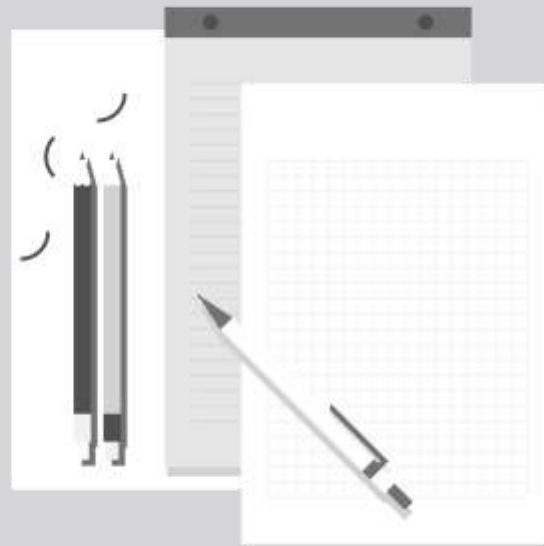
**INTROS AUX  
PROBAS**

# INTRODUCTION AUX STATISTIQUES :

La statistique :

- Science qui s'intéresse aux propriétés des populations naturelles
- Grandeur obtenue à partir d'un ensemble de données d'observation
- Activité de recueil, traitement et interprétation des caractères étudiés

**Une population est un ensemble d'objets, d'êtres vivants (population réelle) ou d'objets abstraits (population fictive) de même nature. Ex : tous les étudiants de licence de Nice.**



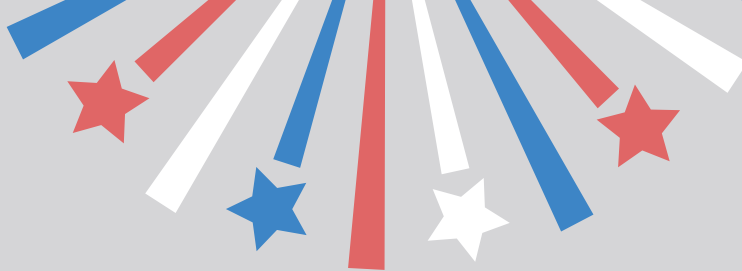
# INTRODUCTION AUX STATISTIQUES :

Travailler sur un extrait de la population a pour conséquences :

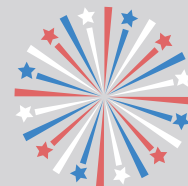
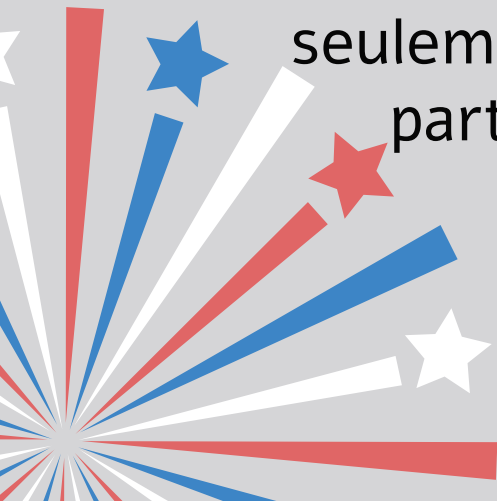
- D'observer partiellement la caractéristique : peut-on extrapoler à la population entière ?

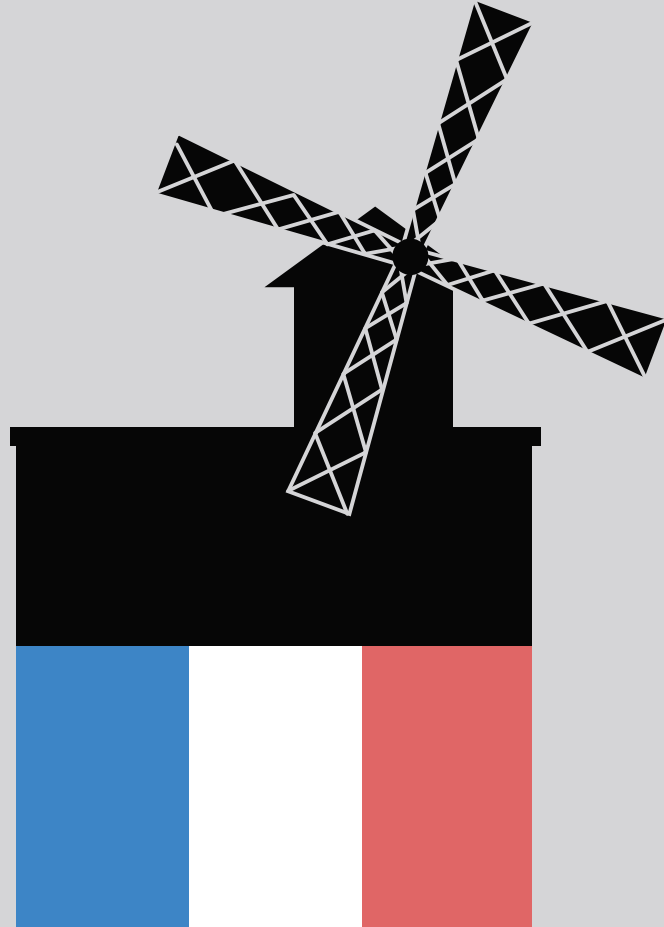
- D'avoir des individus différents à chaque fois que l'on choisit un nouvel échantillon : les mesures seront donc différentes à chaque échantillon.





La théorie des probabilités permet de modéliser les phénomènes où le hasard intervient (jeu de hasard). Cette théorie permet le calcul de cette « extrapolation » de la caractéristique observée sur l'individu. C'est possible seulement si la sélection des individus de l'échantillon à partir de la population a été effectuée au hasard (randomisation).

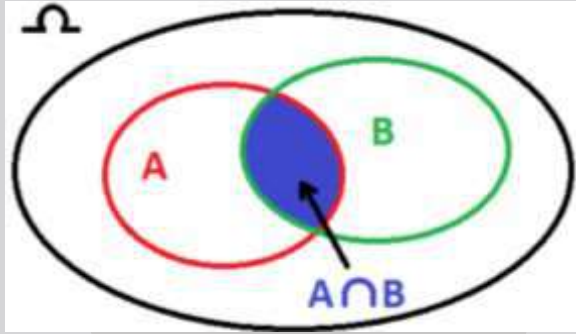




# **DEFINITIONS ET NOTATIONS**

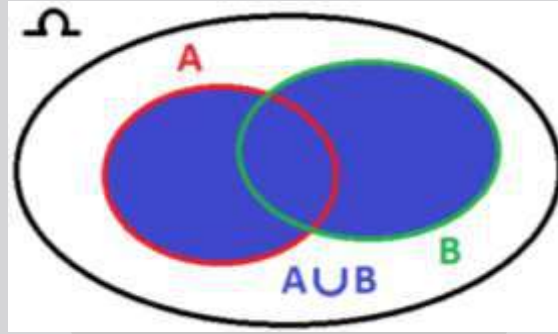
# DEFINITIONS ET NOTATIONS

- $p \in A$  :  $p$  appartient à l'ensemble  $A$ . Ex :  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  et  $p = 2$  alors  $p \in A$
- $B \subset A$  :  $B$  est inclus dans  $A$ ,  $B$  est une partie de l'ensemble  $A$ . Ex :  $B = \{1, 3\}$  alors  $B \subset A$
- $\emptyset$  : l'ensemble vide
- $\Omega$  : l'ensemble universel aussi noté  $E$



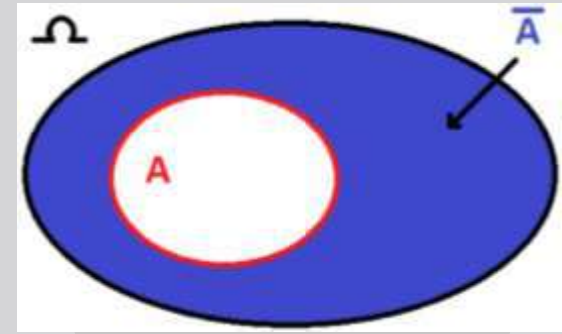
## L'intersection

$A \cap B$  sont les éléments qui appartiennent à la fois à A et à B. Si  $A \cap B = \emptyset$  : il n'y a pas de solution, les ensembles sont disjoints.



## La réunion

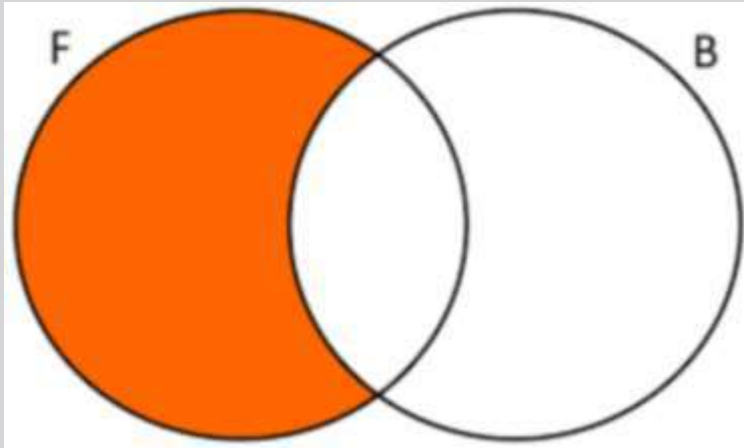
$A \cup B$  sont les éléments qui appartiennent soit à A, soit à B soit aux 2.



## Le complémentaire

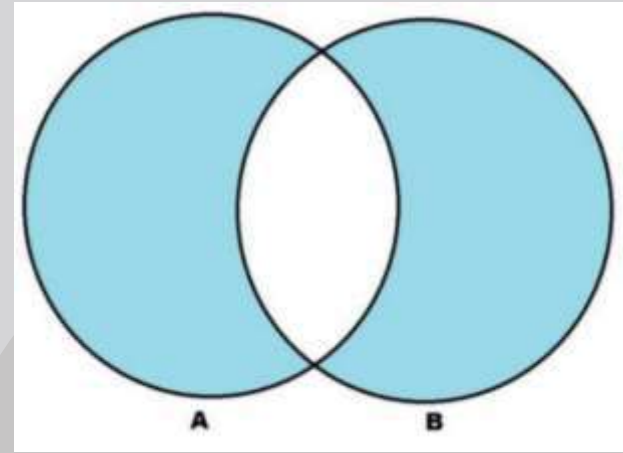
$\bar{A}$  représente tout ce qui n'appartient pas à A





## **La différence entre A et B**

$A-B$  est l'ensemble des  
éléments de A qui  
n'appartiennent pas à B



## **La différence symétrique**

$A \Delta B$  est l'ensemble des  
éléments qui appartiennent  
soit à A, soit à B mais pas à  
 $A \cap B$ .

# IMPORTANT A SAVOIR MAIS SURTOUT IMPORTANT A COMPRENDRE :

$$A \cup A = A$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cup \Omega = \Omega$$

$$A \cup \complement A = \Omega$$

$$\complement \complement A = A$$

$$\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$$

$$A \cap A = A$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

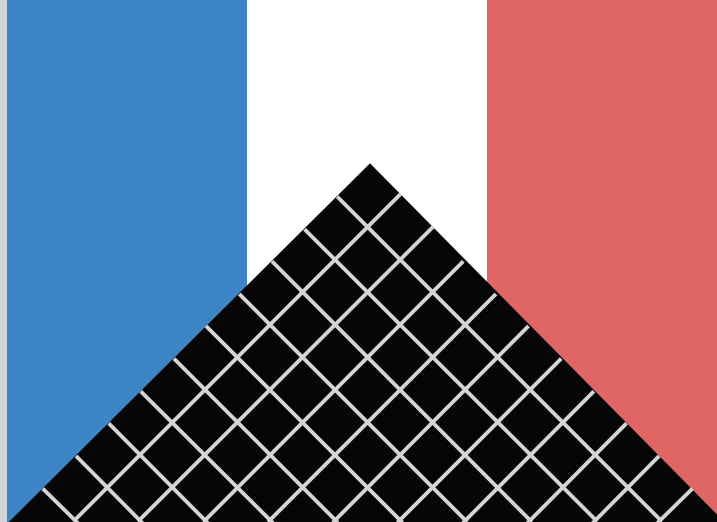
$$A \cap \Omega = A$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \cap \complement A = \emptyset$$

$$\complement \Omega = \emptyset, \complement \emptyset = \Omega$$

$$\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$$



# Il existe différents types d'ensemble :

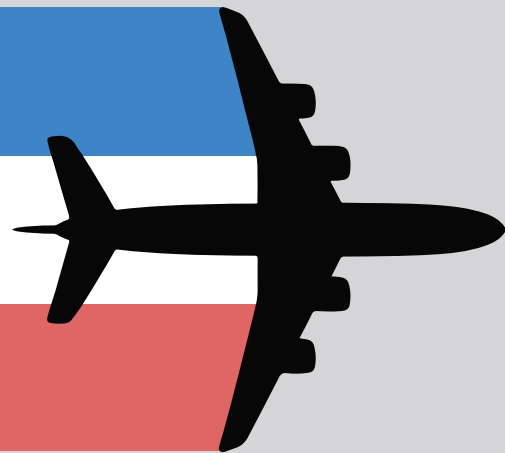
Ensembles finis	Ensemble infinis	
Ensemble nul ou contenant un nombre fini d'éléments	Dénombrables	Indénombrables
	Chaque élément peut être compté	On ne peut pas compter chaque élément

# LES DÉNOMBREMENTS

Les dénombrements permettent de calculer le nombre de possibilités de tirage dans des situations de probabilité. Il existe différentes formules en fonction des différentes situations que l'on peut rencontrer.



Avec remise		Sans remise			
Ordonné		Ordonné			Non ordonné
p-liste avec remise	<u>Arrangements</u> avec répétition	<u>Arrangements</u> de n éléments pris p à p	<u>Permutation</u> d'un ensemble fini à n éléments	<u>Permutations</u> avec répétition	Combinaisons de n éléments pris p à p parties d'un ensemble
On prend 1 élément dans E, on le remet et on répète p fois	On prend 1 élément dans n, on le remet et on répète p fois	On prend SUCCESSIVEMENT (=les uns après les autres) p éléments parmi n sans remettre	On prend les éléments 1 à 1 sans les remettre jusqu'à épuisement $p = n$	On prend les éléments 1 à 1 jusqu'à épuisement en ne tenant compte que des catégories	On prend SIMULTANEMENT (=tous en même temps) p éléments parmi n
$(\text{Card } E)^p$	$n^p$	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$	$n!$	$\frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_x!}$	$C_n^p = \frac{n!}{p! (n-p)!}$



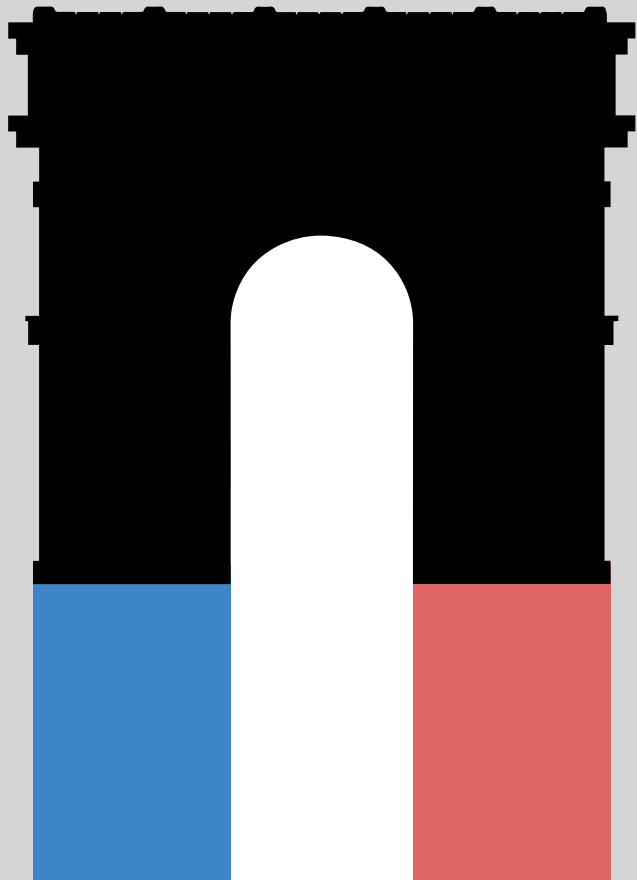
# **INTROS AUX PROBAS**

# INTROS AUX PROBAS

Vous allez voir, vous allez  
kiffer:



- Les phénomènes déterministes, dont l'issue est prévisible (les phénomènes physiques)
- Les phénomènes aléatoires, dont l'issue n'est pas prévisible (comme un lancer de dé)
- Une expérience aléatoire (ou épreuve) est une expérience dont le résultat n'est pas prévisible, c'est donc un phénomène aléatoire.



En probabilité, on travaille sur un ensemble fondamental (noté  $\Omega$ ) qui représente l'ensemble de tous les résultats possibles. Un événement quant à lui est un sous-ensemble de l'ensemble fondamental.



Il existe plusieurs types d'événements :

- L'événement élémentaire ( $\Omega$ ) : constitué d'un seul résultat de l'ensemble.

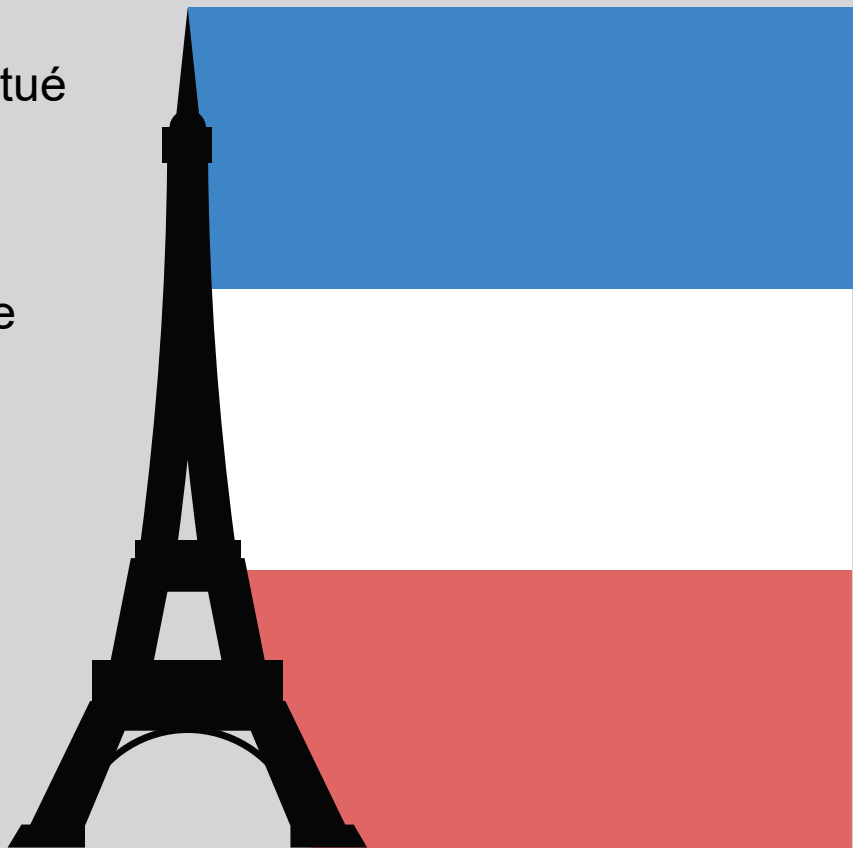
Ex : « Obtenir un 2 » à un lancer de dé

- L'événement impossible ou ensemble vide ( $\emptyset$ ) : ne contient aucun des résultats possibles.

Ex : « Obtenir un 7 » à un lancer de dé

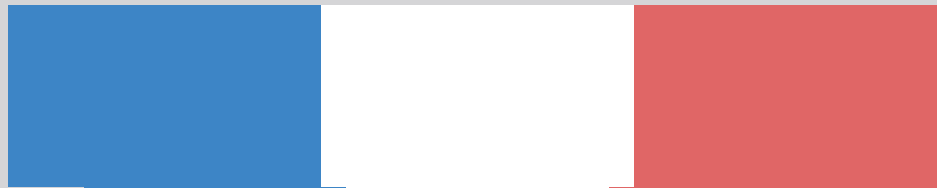
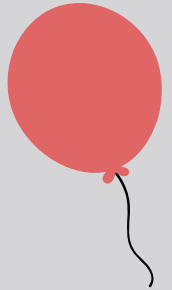
- L'événement certain : l'ensemble contient tous les résultats possibles.

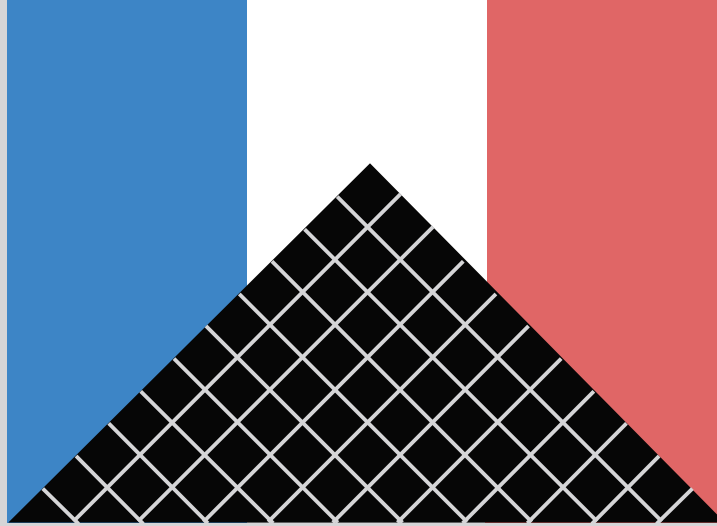
Ex : « obtenir un chiffre » à un lancer de dé





- Une probabilité associe à un événement un nombre allant de 0 à 1, elle permet de mesurer la chance de réalisation de l'événement en question.
  - Quelques règles à connaître :
    - $P(\emptyset) = 0$  : l'événement impossible ne peut pas se produire
      - $P(\Omega) = 1$
      - $P(CA) = 1 - P(A)$
  - Si  $A \subset B$  (est inclus dans B) alors  $P(A) \leq P(B)$  (car A est une partie de B)
    - Si  $P(A \cap B) = 0$  alors ils s'excluent mutuellement et A et B sont dits incompatibles.



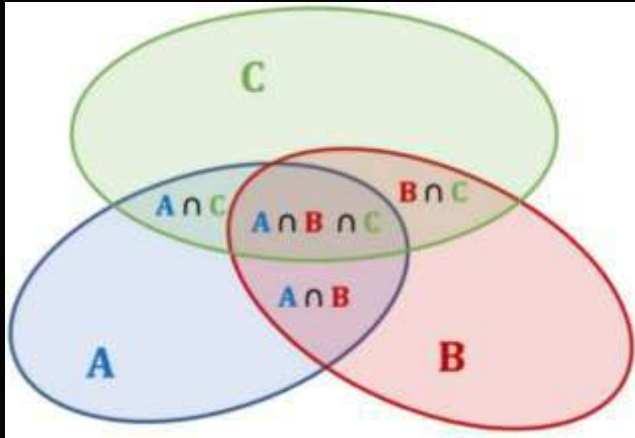


## **Théorème des probabilités totales :**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Si A et B sont incompatibles,  $P(A \cap B) = 0$  donc  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

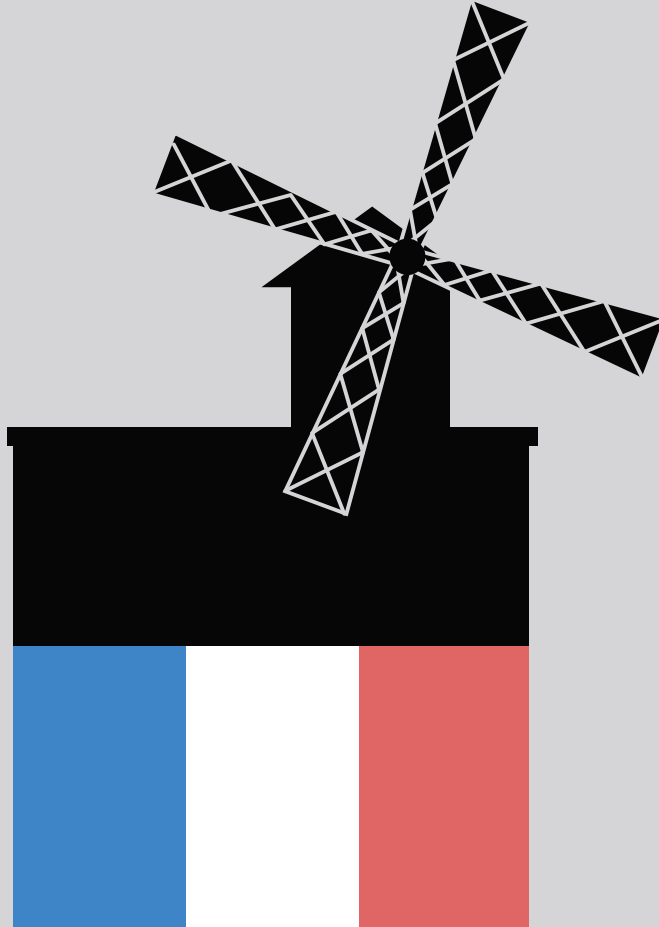
# Propriété d'additivité forte ou formule de Poincaré (d'inclusion-exclusion ou de crible) :



Pour obtenir cette formule on additionne chaque événement ce qui compte 2 fois chaque intersection (et 3 fois celle du milieu). On enlève donc chaque intersection 1 fois mais ça laisse un trou au milieu qu'il faut donc combler.

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

entrer un sous-titre ici si vous en avez besoin



# Équiprobabilité :

Lors d'une situation d'équiprobabilité, tous les événements élémentaires ont la même chance de se produire.

La probabilité d'un événement A est

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

avec Card (A) le nombre

d'élément de l'événement (de cas favorables) et Card (Ω) le nombre d'élément de l'univers (de cas possibles)

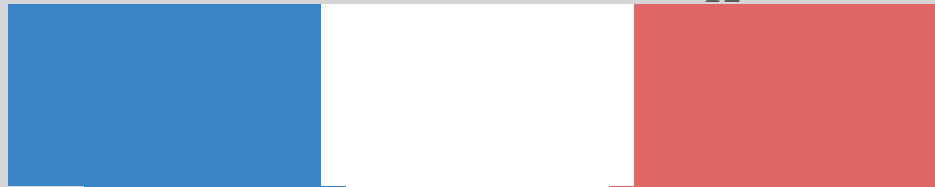


## Probabilité et ensembles :

- Pour un ensemble fini, la probabilité d'un événement est comprise entre 0 et 1. De plus, la somme des probabilités de tous les événements élémentaires est toujours égale à 1.

- Ex : considérons un dé biaisé tel que  $P(1) = \frac{1}{3}, P(2) = \frac{1}{6}, P(3) = \frac{1}{12}, P(4) = \frac{1}{12}, P(5) = \frac{1}{4}$
- Un dé correspond à un ensemble fini donc  $P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$

- Ainsi on a donc  $P(6) = \frac{1}{12}$



**UNE IMAGE  
VAUT MILLE  
MOTS : LA  
BIOSTATS C  
LA VIE**



