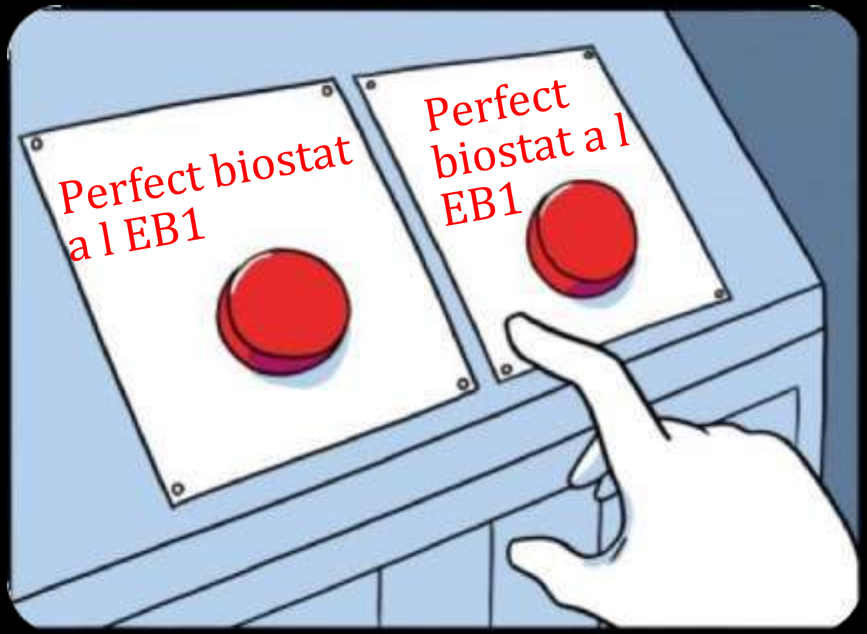
TTR
2023

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES, THÉORÈME DE BAYES, INDÉPENDANCE EN PROBABIITÉS :

TUT'RENTRÉE 2023-2024, ECUE 5 : BIOSTATISTIQUES



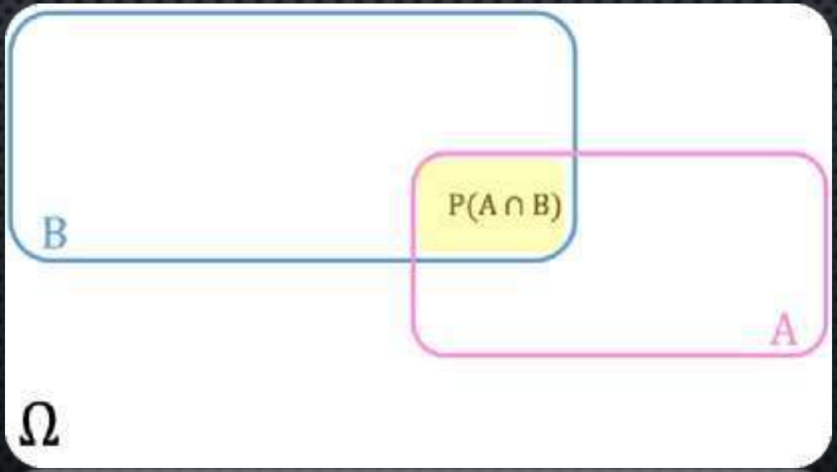
DEFINITIONS DE BASE EN PROBABILITES

- $\mathbf{\Omega}$ Ensemble fondamental, l’univers
- P(A)
- $\mathbf{P}(\bar{\mathbf{A}})$ ou **P(CA)**
- $\mathbf{P(A \cap B) = P(B \cap A)}$

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

- Qu'est-ce qu'une probabilité conditionnelle ?

- $\mathbf{P(A|B) = PB(A)}$



FORMULE DE LA PROBABILITE CONDITIONNELLE :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Manger une glace sachant qu'on est à la plage

Manger une glace et être à la plage

Être à la plage

THEOREME DE LA MULTIPLICATION :

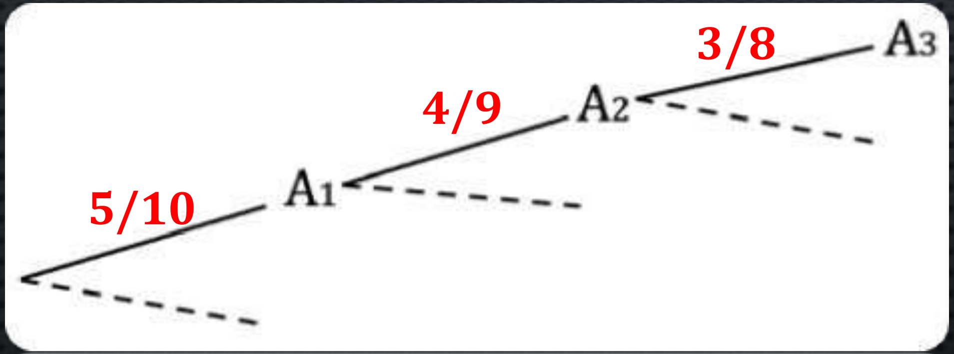
$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A|B).P(B) = P(B|A).P(A)$$

⚠ *Au nom du théorème ou de la formule* ⚠

EXEMPLE D'APPLICATION DU THÉORÈME DE LA MULTIPLICATION :

On a une valise avec 10 tee-shirts avec 5 rouges, 2 verts et 3 jaunes.
On veut connaitre la probabilité de tirer 3 rouges d'af@ilé dans la valise.

- *A1 : tirer un premier rouge*
- *A2 : tirer un deuxième rouge*
- *A3 : tirer un troisième rouge*



On a donc :
$P(A1)$ = 5/10
$P(A2|A1)$ = 5-1/10-1 = 4/9
$P(A3|A1 \cap A2)$ = 4-1/9-1 = 3/8

$P(A1 \cap A2 \cap A3)$= $P(A1).P(A2|A1).P(A3|A1 \cap A2)$= 5/10.4/9.3/8
= 1/12
Il y a donc 1/12 chance de tirer 3 tee-shirts rouges d'af;ilé.

1. Selon le théorème de la multiplication, la probabilité d’un chemin est le produit de chaque branche du chemin

2. Les chemins s’excluent mutuellement

3. La somme de toutes les probabilités des =inalités doit être égale à 1

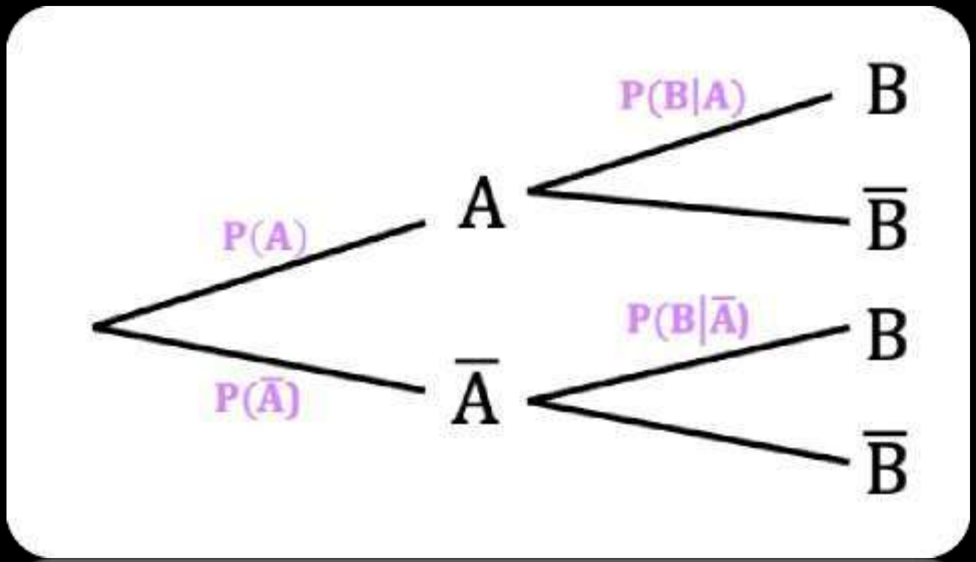
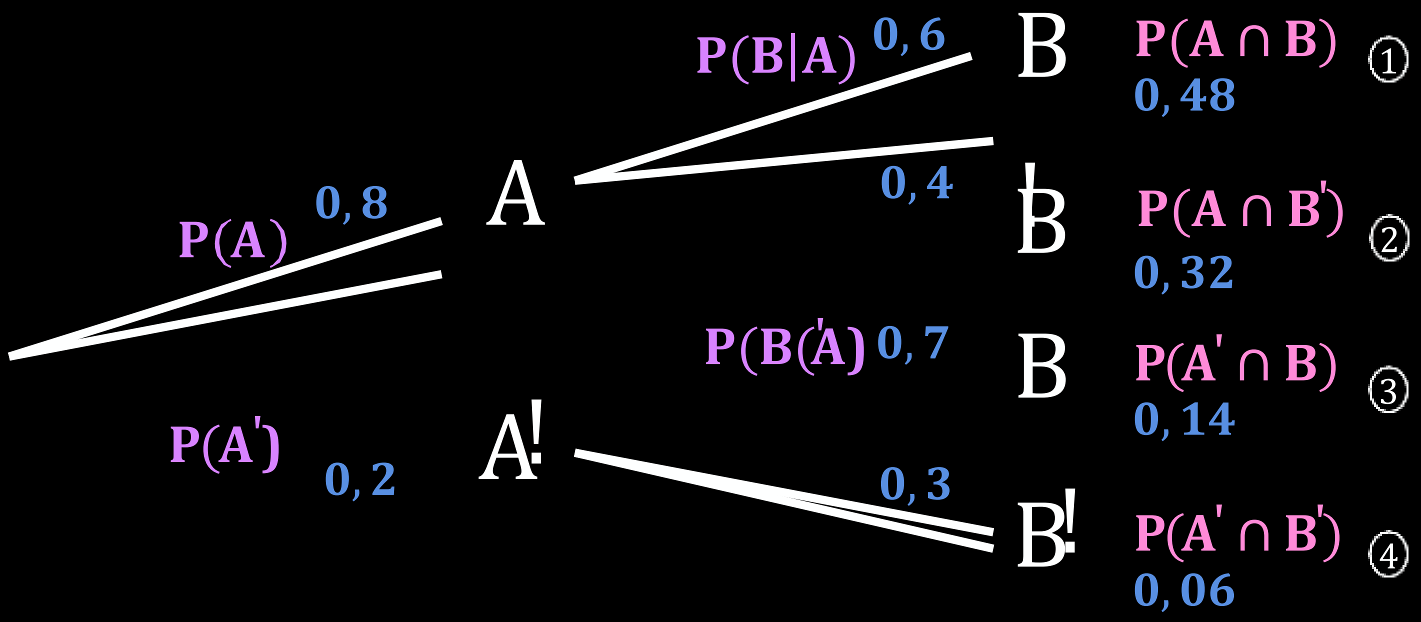


DIAGRAMME EN ARBRE

Complétez l'arbre :

- $P(A')$
- $P(B(A')$
- $P(B'(A')$
- $P(B|A)$
- $P(A \cap B')$



Exemple d'application avec diagramme en arbre

FORMULE DE BAYES :

DÉFINITION D'UNE PROBABILITÉ CONDITIONNELLE :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \textbf{ou} \quad P(B|A) = \frac{\mathbf{P(A \cap B)}}{P(A)}$$

+

Théorème de la multiplication :

$$\mathbf{P(A \cap \boldsymbol{B})} = P(B \cap A) = \mathbf{P(A|B).P(\boldsymbol{B})} = P(B|A).P(A)$$

=

Formule de Bayes :

$$+ + + \quad \mathbf{P(B|A) = \frac{P(A|\boldsymbol{B}).\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B})}{P(A)}} \quad + + +$$

$$P(B|A) = \frac{P(A|B).P(B)}{P(A)}$$

A : PepperMate→ P(A) = 5/20

B : Stylo Bleu → P(B) = 12/20

$P(B|A) = 4/5$

Dans une trousse on a 20 stylos. On a 15 stylos Bic et le reste des stylos sont des PaperMate. On sait aussi que 12 sont bleus, 4 sont rouges et le reste sont noirs.

Parmi les PaperMate, 4 sont bleus, et celui restant est rouge.

On veut savoir quelle est la probabilité si on tire un stylo au hasard parmi ceux qui sont bleus et de tomber sur un PaperMate ?

Exemple d’application de la formule de Bayes :

$$P(B|A) = \frac{P(A|B).P(B)}{P(A)}$$

Exemple d’application de la formule de Bayes :

A : PepperMate → P(A) = 5/20

B : Stylo Bleu → P(B) = 12/20

$P(B|A) = 4/5$

$$P(B|A) = \frac{P(A|B).P(B)}{P(A)} \qquad P(A|B) = \frac{P(B|A).P(A)}{P(B)}$$

$$P(A|B) = \frac{\frac{4}{5}.\frac{5}{20}}{\frac{12}{20}}$$

$$P(A|B) = \frac{\frac{4}{5}.\frac{5}{20}}{\frac{12}{20}} = \frac{4.5.20}{5.20.12} = \frac{1}{3}$$

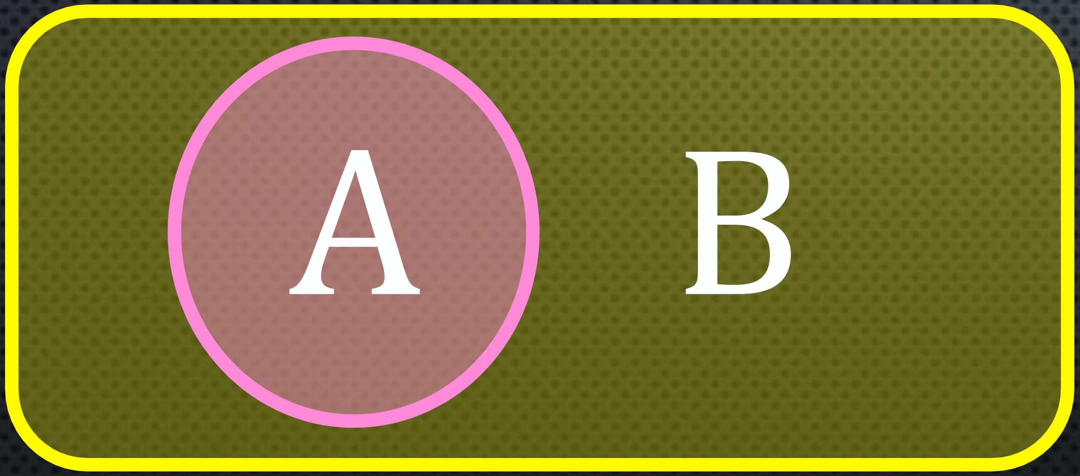
Quand t’as tout compris avec l’exemple

ÉVÈNEMENTS INDÉPENDANTS

- **$P(B \cap A) = P(A).P(B)$**
- La probabilité de réalisation de A ne change pas avec la réalisation de B
- Soient A, B, et C : s'ils sont indépendants 2 à 2 (A indépendant de B, A indépendant de C et C indépendant de B) **ET** si $P(A \cap B \cap C) = P(A).P(B).P(C)$, alors ces 3 évènements sont **indépendants** !

INDÉPENDANCE ET INCLUSION :

$A \subset B$: A est inclus dans B donc $P(A \cap B) = P(A)$



Formule de Bayes quand $A \subset B$:

$$P(A|B) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)}$$

⚠️ A et B ne sont **PAS** indépendants ⚠️

INDÉPENDANCE ET EXCLUSION :

$\mathbf{A \cap B = \emptyset}$; $\mathbf{P(A \cap \mathit{B}) = 0}$: A et B sont **exclusifs**, **disjoints**, **incompatibles**, donc $P(A|B) = P(B|A) = 0$

⚠ A et B ne sont <u>**PAS**</u> indépendants ⚠

INCOMPATIBILITÉ ET INDÉPENDANCE :

Incompatibles = exclusifs = disjoints	**Indépendants**
Ne fait PAS intervenir leur probabilité	Liés à leur probabilité
Ne peuvent PAS se produire en même temps	Peuvent se produire en même temps
Défini par : $\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$	$\mathbf{P(A \cap B) = P(A).P(B)}$

COURAGE À TOUS, DONNEZ TOUT !!

La Team Biostat