

STATISTIQUES DÉDUCTIVES

Généralités sur les tests d'hypothèse

Le but principal des statistiques déductives est de tirer des conclusions **à partir des observations**.
Le plus souvent, on essaiera de comparer 2 groupes pour un caractère donné.

Exemple : pour comparer les notes à l'épreuve de biostatistiques entre deux années, on se pose la question : y a-t-il une différence entre ces deux groupes ?

Définition des hypothèses :

En statistiques descriptives on travaille à partir de 2 hypothèses :

| Hypothèse H0 | Hypothèse H1 |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"> ▶ Hypothèse nulle ▶ Il n'y a pas de différence entre les 2 groupes ▶ Les fluctuations observées sont dues au hasard | <ul style="list-style-type: none"> ▶ Hypothèse alternative ▶ Il existe une différence significative entre les deux groupes ▶ Les fluctuations observées ne sont pas dues au hasard |

Un **test** est une technique permettant de décider si on accepte ou rejette H0, en ayant fixé le risque d'erreur α accompagnant cette décision.

Étapes d'un test d'hypothèse :

1. Définir H0 et H1
2. Choisir le test en fonction du **type de données** (qualitative, quantitative, nombre de données)
3. Fixer le **risque α** (souvent 5%)
4. Recueillir les données
5. Calculer Z
6. Utiliser la règle de rejet/acceptation de H0 : **comparer** le Z_c (Z calculé) au Z_t (Z théorique) dont on connaît la distribution
7. Fixer le **risque d'erreur réel** (à posteriori)
8. Interpréter les résultats : interprétation statistique + médicale

Notion de risque :

| Risque de première espèce / Risque α | Risque de seconde espèce / Risque β |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"> ▶ Probabilité de rejeter H0 si H0 est vraie ▶ Ce risque est maîtrisé ▶ Fixé à l'avance | <ul style="list-style-type: none"> ▶ Probabilité d'accepter H0 si H0 est fausse ▶ Ce risque est négligé ▶ Fixé à posteriori ▶ Il peut être très élevé (en général $\beta = 20\%$) |
| La puissance du test vaut $1 - \beta$: probabilité de rejeter H0 avec H1 vraie | |

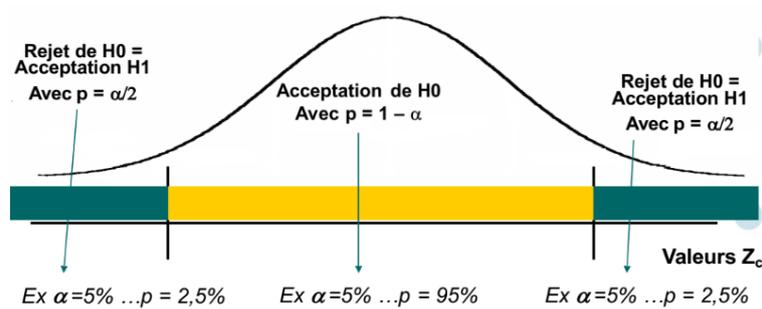
La règle de rejet du test est définie **seulement** à partir de α et de H0.

Entre 2 alternatives, on choisira pour H0 l'hypothèse qu'il serait le **plus grave de rejeter à tort**.

| | | |
|----------|-----------|--------------|
| | Rejet H0 | Non rejet H0 |
| H0 vraie | α | $1-\alpha$ |
| H1 vraie | $1-\beta$ | β |

Interprétation graphique :

Le paramètre Z suit une distribution en forme de Gauss



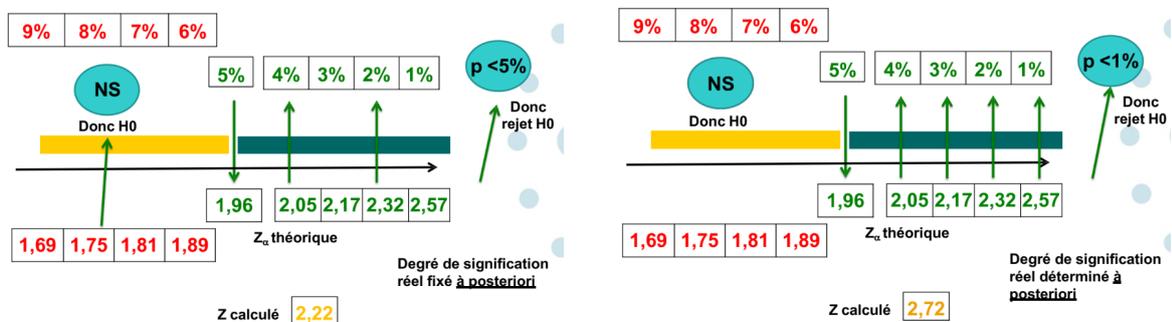
Pour arriver à une conclusion on doit :

1. Fixer le risque α **à priori**
2. Chercher Z_t dans la table
3. Calculer Z_c grâce aux formules
4. Comparer Z_c à Z_t ; on distingue deux situations :

| | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| $Z_c < Z_t$ | $Z_c > Z_t$ |
| Acceptation de H0 $p = 1 - \alpha$ | Rejet de H0 $p \leq \alpha$ |

5. Fixer le degré de signification p **à posteriori**

Le statisticien fixe le risque α à priori, mais dans certains cas il est possible d'avoir une précision d'étude supérieure à celle fixée au départ.



1. $\alpha = 5\%$
2. $Z_\alpha = 1,96$
3. $Z_c = 2,22$
4. $2,22 > 1,96 (Z_c > Z_\alpha)$ donc on rejette H_0
 Pour $\alpha = 1\%$, $Z_\alpha = 2,57$, or $2,22 < 2,57 (Z_c < Z_\alpha)$ donc on ne rejette pas H_0 à 1%
 La précision n'a pas augmenté
5. On a donc $p < 5\%$

Le raisonnement est le même pour $Z_c = 2.72$, mais on peut ici rejeter H_0 à 1% car $2,72 > 2,57$

Dans le cas de $Z_c = 2,22$, on pourrait dire qu'on rejette H_0 à 3% (car $2,17 < 2,22 < 2,32$, voir les chiffres en vert sur le schémas ci-dessus qui représentent Z_α), mais **en pratique on utilise seulement 1% et 5%**.

Si on rejette ou accepte H_0 à tous les seuils, le test n'est **pas très discriminant** ou non significatif

On peut se retrouver face à 2 situations :

| Situation unilatérale | Situation bilatérale |
|---|--|
| Le rejet d' H_0 permet seulement de dire qu'il y a une différence significative entre les 2 situations C'est la situation la plus fréquente | L'acceptation de H_1 permet de déterminer laquelle des situations est la meilleure |

Exemple : si on compare deux traitements A et B, en rejetant H_0 :

- en situation **unilatérale**, on pourra seulement dire qu'il y a une différence significative entre les 2 traitements.
- en situation **bilatérale**, on pourra dire qu'il y a une différence significative **et** que le traitement A est meilleur que le B (ou inversement)

(Hors programme pour la ttr mais au programme cette année : partie sur le big data)

LIEN ENTRE DEUX VARIABLES QUALITATIVES

À partir d'ici les formules ne sont pas à connaître sauf les formules « simples » comme le chi 2

On se demande si le pourcentage d'individu possédant un caractère x dans un groupe A est le même que le pourcentage d'individu possédant le caractère x dans le groupe B.
 Le caractère x est ici **qualitatif** (couleur des yeux, porteur de lunettes, ...)

Test de comparaison des pourcentages (tout effectif) :

Ici le paramètre Z est l'écart réduit ϵ

► ϵ_t vient de la table de l'écart réduit

►
$$\epsilon_c = \frac{p_A - p_B}{\sqrt{\frac{p_A q_A}{n_A} + \frac{p_B q_B}{n_B}}}$$
 Avec $q_A = 1 - p_A$

► Si $\epsilon_c > \epsilon_t \rightarrow$ rejet de H_0

Méthodo pour chercher Z_t dans la table :

| | | | | | | | | | | |
|------------|----------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| | | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
| 0 | ∞ | 2,576 | 2,326 | 2,17 | 2,054 | 1,96 | 1,881 | 1,812 | 1,751 | 1,695 |
| 0,1 | 1,645 | 1,598 | 1,555 | 1,514 | 1,476 | 1,44 | 1,405 | 1,372 | 1,341 | 1,311 |
| 0,2 | 1,282 | 1,254 | 1,227 | 1,2 | 1,175 | 1,15 | 1,126 | 1,103 | 1,08 | 1,058 |
| 0,3 | 1,036 | 1,015 | 0,994 | 0,974 | 0,954 | 0,935 | 0,915 | 0,896 | 0,878 | 0,86 |
| 0,4 | 0,842 | 0,824 | 0,806 | 0,789 | 0,772 | 0,755 | 0,739 | 0,722 | 0,706 | 0,69 |
| 0,5 | 0,674 | 0,659 | 0,643 | 0,628 | 0,613 | 0,598 | 0,583 | 0,568 | 0,553 | 0,539 |
| 0,6 | 0,524 | 0,51 | 0,496 | 0,482 | 0,468 | 0,454 | 0,44 | 0,426 | 0,412 | 0,399 |
| 0,7 | 0,385 | 0,372 | 0,358 | 0,345 | 0,332 | 0,319 | 0,305 | 0,292 | 0,279 | 0,266 |
| 0,8 | 0,253 | 0,24 | 0,228 | 0,215 | 0,202 | 0,189 | 0,176 | 0,164 | 0,151 | 0,138 |
| 0,9 | 0,126 | 0,113 | 0,1 | 0,088 | 0,075 | 0,063 | 0,05 | 0,038 | 0,025 | 0,013 |

Table pour les petites valeurs de la probabilité

| | | | | | | |
|---------------|----------------|-----------------|------------------|--------------------|---------------------|----------------------|
| 0,001 | 0,000 1 | 0,000 01 | 0,000 001 | 0,000 000 1 | 0,000 000 01 | 0,000 000 001 |
| 3,2905 | 3,8905 | 4,41717 | 4,89164 | 5,32672 | 5,73073 | 6,10941 |

On cherche ϵ_t en fonction d' α

On regarde le dixième d' α sur les lignes et le centième sur les colonnes. ϵ_t sera à l'intersection.

E.g : Pour $a = 5\% = 0,05$: on regarde 0,00 pour les lignes et 0,05 pour les colonnes : $\epsilon_t = 1,96$

Pour $a = 0,1\% = 0,001$: on regarde la table des petites valeurs $\epsilon_t = 3,29$

Exemple : Soient 2 groupes de 200 enfants : Crèche : 200 enfants, 130 rhinos
Maison : 200 enfants, 96 rhinos

Le mode de garde influe-t-il sur le risque de rhinopharyngite ?

- H_0 : pas de différence entre les 2 modes de garde vis-à-vis du développement de rhinos
 H_1 : il y a une différence
- Caractère 1 : gardé en crèche ou à domicile : **qualitatif**
Caractère 2 : développer une rhinopharyngite ou non : **qualitatif**
→ test de comparaison de pourcentages
- $\alpha = 5\%$
- Recueil des données
- $p_A = 65\%$ $p_B = 48\%$.
 $\epsilon_c = 3,4$
- $3,4 > 1,96$: on rejette H_0 au seuil 5%
 $3,4 > 3,3$ donc on rejette H_0
- Seuil : 0,001
- Sur cet échantillon, le risque de rhino est supérieur chez les enfants gardés en crèche. On ne peut pas généraliser car il n'y a pas eu de tirage au sort et il manque des infos sur les enfants (précision du mode de garde à domicile, du revenu des parents, ...)

Test du X^2 (Tout effectif) :

On utilise de préférence ce test si notre tableau de données a plus de 2 lignes (ou 2 colonnes)
Ici le paramètre Z est X^2

- ▶ X^2_t vient de la table du X^2
- ▶ $X^2_c = \sum \frac{(o_i - c_i)^2}{c_i}$ avec o_i les données observées et c_i les données calculées
- ▶ **Si $X^2_c > X^2_t \rightarrow$ Rejet de H_0**
- ▶ **DDL = (nombre de lignes - 1) * (nombre de colonnes - 1)**

Comment lire X^2_t dans la table ?

| ddl | α | | | | | | | | |
|----------|----------|--------|--------|--------|--------|--------------|--------|--------|--------|
| | 0,9 | 0,5 | 0,3 | 0,2 | 0,1 | 0,05 | 0,02 | 0,01 | 0,001 |
| 1 | 0,016 | 0,455 | 1,074 | 1,642 | 2,706 | 3,841 | 5,412 | 6,635 | 10,827 |
| 2 | 0,211 | 1,386 | 2,408 | 3,219 | 4,605 | 5,991 | 7,824 | 9,21 | 13,815 |
| 3 | 0,584 | 2,366 | 3,665 | 4,642 | 6,251 | 7,815 | 9,837 | 11,345 | 16,266 |
| 4 | 1,064 | 3,357 | 4,878 | 5,989 | 7,779 | 9,488 | 11,668 | 13,277 | 18,467 |
| 5 | 1,61 | 4,351 | 6,064 | 7,289 | 9,236 | 11,07 | 13,388 | 15,086 | 20,515 |
| 6 | 2,204 | 5,348 | 7,231 | 8,558 | 10,645 | 12,592 | 15,033 | 16,812 | 22,457 |
| 7 | 2,833 | 6,346 | 8,383 | 9,803 | 12,017 | 14,067 | 16,622 | 18,475 | 24,322 |
| 8 | 3,49 | 7,344 | 9,524 | 11,03 | 13,362 | 15,507 | 18,168 | 20,09 | 26,125 |
| 9 | 4,168 | 8,343 | 10,656 | 12,242 | 14,684 | 16,919 | 19,679 | 21,666 | 27,877 |
| 10 | 4,865 | 9,342 | 11,781 | 13,442 | 15,987 | 18,307 | 21,161 | 23,209 | 29,588 |
| 11 | 5,578 | 10,341 | 12,899 | 14,631 | 17,275 | 19,675 | 22,618 | 24,725 | 31,264 |
| 12 | 6,304 | 11,34 | 14,011 | 15,812 | 18,549 | 21,026 | 24,054 | 26,217 | 32,909 |
| 13 | 7,042 | 12,34 | 15,119 | 16,985 | 19,812 | 22,362 | 25,472 | 27,688 | 34,528 |
| 14 | 7,79 | 13,339 | 16,222 | 18,151 | 21,064 | 23,685 | 26,873 | 29,141 | 36,123 |
| 15 | 8,547 | 14,339 | 17,322 | 19,311 | 22,307 | 24,996 | 28,259 | 30,578 | 37,697 |
| 16 | 9,312 | 15,338 | 18,418 | 20,465 | 23,542 | 26,296 | 29,633 | 32 | 39,252 |
| 17 | 10,085 | 16,338 | 19,511 | 21,615 | 24,769 | 27,587 | 30,995 | 33,409 | 40,79 |
| ... | | | | | | | | | |

X^2_t dépend d' α et du DDL

Le DDL ou **degré de liberté** est le nombre minimal de valeur nécessaire dans une série pour pouvoir calculer toutes les autres

On cherche le ddl sur les lignes et α sur les colonnes

Ex : Si $\alpha = 5\%$ et $DDL = 1$ alors $X^2_t = 3,8$

Exemple : exposition au benzène et leucémie

| | Leucémie | Non leucémie | Total |
|----------|----------|--------------|-------|
| Expo | 15 | 485 | 500 |
| Non expo | 20 | 980 | 1000 |
| Total | 35 | 1465 | 1500 |

1. H_0 : il n'existe pas de lien entre l'exposition au benzène et les leucémies
2. Variable 1 : leucémie ou non : qualitatif
Variable 2 : Exposé ou non : qualitatif
→ Test du X^2
3. $\alpha = 5\%$
4. Valeurs observées : 15, 20, 485 et 980
Valeurs calculées (obtenues par un modèle théorique) :
 - il y a 35 malades pour 1500 personnes au total soit 2,33% de malade. On applique ce pourcentage aux exposés et aux non exposés.
 - 2,33% de 500 (les exposés) = 11,65 malades chez les expos (chiffre théorique)
 - 2,33% de 1000 (les non-expos) = 23,35

- il y a 1465 non malades pour 1500 personnes au total soit 97,67%. On applique ce pourcentage aux exposés et aux non-exposés :
 - 97,67% de 500 = 488,3
 - 97,67% de 1500 = 976,7
 - $X_c^2 = 1,42$
 - $X_t: ddl = (2-1) * (2-1) = 1$ donc $ddl = 3,84$
- 5. $X_c^2 < X_t^2$ donc on accepte H_0 au seuil 0,05
Il n'existe pas de relation entre l'exposition au benzène et les leucémies

LIEN ENTRE VARIABLES QUALITATIVES ET QUANTITATIVES

On se demande si en moyenne la taille des individus d'une population A coïncide avec la taille des individus d'une population B

Test de comparaison de moyennes (n_1 et $n_2 > 30$: grands échantillons) :

Ici le paramètre Z est l'écart-réduit ε

► ε_t vient de la table de l'écart-réduit

►
$$\varepsilon_c = \frac{m_1 - m_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

► **Si $\varepsilon_c > \varepsilon_t \rightarrow$ rejet de H_0**

Exemple : On cherche à comparer le taux de T3 libre chez les femmes prenant un contraceptif oral et celles qui n'en prennent pas. Après tirage au sort on obtient :

Femmes sans c.o : $n_1 = 50$; $m_1 = 2$ nmol ; $s_1 = 0,35$ nmol

Femmes avec c.o : $n_2 = 33$; $m_2 = 2,5$ nmol ; $s_2 = 0,3$ nmol

1. H_0 : les moyennes ne sont pas différentes, ce sont 2 estimateurs du taux de T3 libre chez la femme en général
2. Variable 1 : prise ou non de la pilule : qualitatif
Variable 2 : dosage de T3 : quantitatif
 n_1 et $n_2 > 30$
→ Test de comparaison de moyennes
3. $\alpha = 5\%$
4. $\varepsilon_t = 1,96$
5. $\varepsilon_c = 6,94$
6. $\varepsilon_c > \varepsilon_t$ donc rejet de H_0
7. $p < 0,0001$
8. Il y a eu TAS donc le résultat est généralisable : la prise de c.o augmente le taux de T3 libre

Test T de student (n1 ou n2 < 30 : petits échantillons) :

Ici le paramètre Z est t

t_t : lu dans la table du t de student

▶ $s = \sqrt{\frac{\sum(x_i - m_1)^2 + \sum(x_j - m_2)^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)}}$ (Trop compliqué à calculer, on vous le donnera dans l'énoncé)

▶ **Si t_c > t_t → rejet de H0**

▶ **DDL = (n₁ - 1) + (n₂ - 1)**

C'est presque la même formule que pour la comparaison de moyenne mais on utilise seulement l'écart-type s car il est moins significatif ici

Précision sur le ddl : (n est le nombre de valeurs par ligne, comme le nombre de notes dans un semestre par exemple)

| | | | | | | | | |
|---|---|---|----|----|---|---|---|----------|
| 2 | 3 | 5 | 12 | 10 | x | 7 | 8 | Tot : 51 |
| 2 | 3 | 5 | 12 | 10 | y | z | 8 | Tot : 51 |

Avec n-1 valeur et le total, on peut trouver que x=51-2-3-5-12-10-7-8

Avec n-2 valeurs, on ne peut pas trouver les deux valeurs manquantes

Le degré de liberté est donc de n-1 ici.

Exemple : Soient 15 femmes obèses et 12 femmes de poids normal. On mesure le taux de corticoïde sanguin moyen dans chaque groupe. L'obésité a-t-elle une influence sur le taux de corticoïde ?

n1 = 15 ; m1 = 6,3 ; s1 = 1,8

n2 = 12 ; m2 = 4,5 ; s2 = 1,6

1. H0 : m1 et m2 ne sont pas différents dans les 2 groupes

2. Variable 1 : obèse ou non : qualitatif

Variable 2 : taux de corticoïde : quantitatif

n1 ou n2 < 30 à T de student

3. a = 5%

4. DDL = 15 + 12 - 2 = 25 donc Tt = 2,06

5. Tc = 2,92

6. Tc > Tt donc on rejette H0 au seuil 5%

7. p < 1% après lecture dans la table. On rejette H0 à 1% à posteriori

8. Il existe une relation claire entre l'obésité et le taux de corticoïde au niveau de cet échantillon

(HP pour la ttr mais au programme pour l'année : méthode de série appariée ou méthode des couples)

LIEN ENTRE DEUX VARIABLES QUANTITATIVES

Corrélation et régression :

Corrélation : évaluation de la liaison entre 2 variables quantitatives

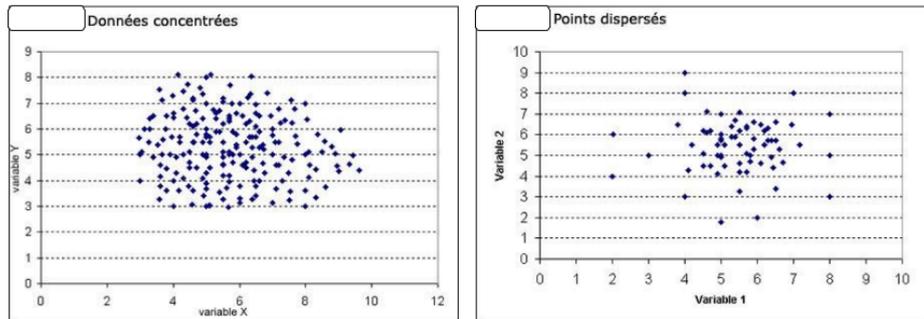
Régression : méthode mathématique permettant d'expliquer les relations entre les variables observées

Représentation des données :

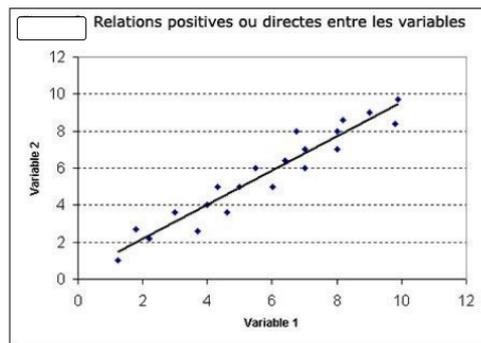
En variable x, on met la variable explicative.
 En variable y, on met la variable à expliquer.

Nuages de points :

Il n’y a pas de relation entre x et y



Droite de régression : elle permet de visualiser si l’une des 2 variables est **dépendante** de l’autre. La droite de régression est aussi appelée **droite des moindres carrés** car elle passe au plus près de chaque point du graphe. Dans ce cours on ne parle que de régression linéaire car on a choisi d’avoir une droite et pas un polynôme (en forme de cloche)



Étude de la liaison entre caractères quantitatifs :

Exemple : la capacité respiratoire des enfants est-elle dépendante de la consommation de cigarettes de leurs mères ?
 Le poids des bébés à la naissance est-il lié à l’âge de la mère ?

Une droite de régression peut permettre de **prédire** certaines valeurs de y à partir d’une valeur x. Plus on a de valeurs, plus notre droite permettra de prédire les valeurs suivantes de manière précise. Avec seulement 3 valeurs, la 4eme valeur sera prédite de manière imprécise.

On a un échantillon de 10 sujets. On recueille leur âge et leur concentration de cholestérol.

| | | | | | | | | | | |
|--------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| X âge | 30 | 60 | 40 | 20 | 50 | 30 | 40 | 20 | 70 | 60 |
| Y chol | 1,6 | 2,5 | 2,2 | 1,4 | 2,7 | 1,8 | 2,1 | 1,5 | 2,8 | 2,6 |

- Le taux de cholestérol est-il lié à l’âge ?
1. H_0 : le taux de cholestérol n’est pas lié à l’âge
 2. Variable 1 : Age = quantitatif
 Variable 2 : taux de cholestérol = quantitatif

→ Test du coefficient de corrélation

3. $\alpha = 1\%$,
DDL = 10-2 = 8 donc $r_t = 0,76$
4. $r'_c = 0,955 > r'_t$
5. On rejette H_0 au seuil 1%

On obtient une relation significative au seuil 1% : plus l'âge augmente, plus le taux de cholestérol augmente.
Le résultat n'est pas généralisable car on a seulement 10 individus sans TAS

Corrélation \neq causalité : Si d'un point de vue mathématique on a obtenu une corrélation entre des paramètres statistiques, cela n'implique pas une relation de cause à effet entre les paramètres.

Corrélation : il existe un lien : l'âge et le cholestérol sont liés

Causalité : l'un est la conséquence de l'autre : l'âge cause le cholestérol

On peut des faire de corrélations de tout et n'importe quoi, on peut tracer des courbes qui montrent une relation de proportionnalité sans pour autant qu' x influe y . C'est le rôle des statistiques et des essais cliniques de déterminer si ce lien de corrélation est un lien de causalité ou non.

TESTS NON PARAMÉTRIQUES

► **Test paramétrique** : test à forte contrainte, car il n'est fiable que si les données suivent une distribution selon une loi normale.

► **Test non paramétrique** : test qui **ne** précise **pas** les conditions que doivent remplir les paramètres de la population dont a été extrait l'échantillon

On utilise **obligatoirement** un test **non paramétrique** quand les effectifs sont **très faibles** ($4 < n < 12$) +++

Pour les variables quantitatives, on utilise obligatoirement un test non paramétrique si les effectifs sont **inférieurs à 5** car les populations ne sont plus distribuées normalement.

U de Mann et Whitney :

Le test U de Mann et Whitney (ou Wilcoxon-Mann-Whitney ou test de la somme de rangs de Wilcoxon), permet de tester l'hypothèse selon laquelle **les moyennes des 2 groupes de données sont proches**.

On a 2 échantillons E_1 et E_2 de taille n_1 et n_2 indépendants :

1. On réunit les valeurs des 2 échantillons
2. On trie la réunion en ordre croissant
3. Pour chaque valeur issue de E_1 , on compte le nombre de valeur de E_2 situées après (s'il y a des valeurs égales, elles ne valent que 1/2) (peu d'importance entre avant ou après tant qu'on fait la même chose tout le long)
4. La somme de ces nombres vaudra u_1
5. On échange les rôles des 2 échantillons pour trouver la somme u_2
6. Le u de Mann et Whitney est le minimum entre u_1 et u_2
7. On compare u_c avec u_t de la table

On note U la variable aléatoire associée (pour pouvoir parler de probabilité on doit parler d'une variable aléatoire)

- ▶ On lit dans la table le nombre m_α tel que $P(U \leq m_\alpha) = \alpha$
- ▶ On rejette H_0 au risque α si $u \leq m_\alpha$, sinon on accepte H_0
- ▶ Si $U_c > U_t \rightarrow$ on **ACCEPTÉ** H_0

Si les effectifs sont grands (n_1 et $n_2 > 20$ en général), U suit approximativement la **loi normale**

Exemple : On répartit par tirage au sort 20 malades dépressifs en 2 groupes de 10. Le 1er groupe reçoit la molécule et le 2ème reçoit le placebo. On évalue les patients sur une échelle de 0 à 50 (pas déprimé -> très déprimé). Les patients sont évalués avant puis après ttt (J28). **La nouvelle molécule a-t-elle un effet anti-dépresseur ?**

| | | | | | | | | | | | |
|---------|-----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Témoins | J0 | 34 | 30 | 25 | 27 | 31 | 24 | 28 | 30 | 35 | 26 |
| | J28 | 31 | 28 | 26 | 25 | 24 | 25 | 26 | 27 | 32 | 25 |
| Traités | J0 | 27 | 32 | 30 | 28 | 25 | 33 | 29 | 31 | 32 | 29 |
| | J28 | 22 | 25 | 23 | 26 | 20 | 27 | 21 | 26 | 25 | 23 |

Y a-t-il un effet placebo ?

1. H_0 : le placebo n'a aucun effet, les scores J0 ne diffèrent pas des scores J28
2. Variable 1 : J0 – J28 -> qualitatif
Variable 2 : score de dépression -> quantitatif
On compare des moyennes : test T de student pour séries appariées ou U de Mann et Whitney
3. $T_t = 2,26$ (ddl = 10-1 = 9) et $\alpha = 5\%$
4. $T_c = 2,91 > T_{Bt}$
5. Rejet de H_0 au risque 5%. Le placebo a un effet significatif.

Le traitement est-il efficace ?

On compare les différences J28 – J0 de chaque patient, entre les 2 groupes :

1. H_0 : il n'y a pas de différence entre le traitement et le placebo
2. Variable 1 : traitement ou placebo -> qualitatif
Variable 2 : score de dépression -> quantitatif
3. 2 groupes indépendants de faibles effectifs à test T de student ou U de Mann et Whitney
4. Dans la table, avec $\alpha = 5\%$, $n_1 = 10$ et $n_2 = 10$, $u_t = 23$

| | | | | | | | | | | |
|---------------------|---|---|----|---|---|----|---|---|---|---|
| Témoins d=J0-J28 | 3 | 2 | -1 | 2 | 7 | -1 | 2 | 3 | 3 | 1 |
| Traités d=J0-J28 | 5 | 7 | 7 | 2 | 5 | 6 | 8 | 5 | 7 | 6 |

On classe ces différences par ordre croissant et on leurs associe un rang :

| | | | | | | | | | |
|-----|-----|----|------|------|------|------|------|------|----|
| -1 | -1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 |
| 1,5 | 1,5 | 3 | 5,5 | 5,5 | 5,5 | 5,5 | 9 | 9 | 9 |
| 5 | 5 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 | 8 |
| 12 | 12 | 12 | 14,5 | 14,5 | 17,5 | 17,5 | 17,5 | 17,5 | 20 |

Pour les valeurs en double, on calcule $(\Sigma \text{rang})/(\text{nombre de valeurs})$.

Par exemple pour -1 le rang est $(1+2)/2 = 1,5$.

Pour 2 le rang est $(4+5+6+7)/4 = 22,5$.

On calcule u_t : pour chaque témoin, on compte les traités classés avant : $u_t = 0+0+0+0+0+0+1+1+1+6 = 9$

On calcule $u_2 = 91$: soit on recalcule tout, soit on sait que $u_1 + u_2 =$ donc $9 + u_2 = 10 \cdot 10$

On prend $u = \min(u_1 ; u_2) = 9$

$U_c < U_t$: peu d'imbrication

Rejet de H_0 au seuil 5%

Les différences sont significativement plus importantes avec le traitement qu'avec le placebo : le traitement est efficace contre la dépression

Comment lire U_t dans la table ?

| $n_2 - n_1$ | n_1 | | | | | | | | | |
|-------------|-------|---|---|----|----|----|----|----|----|----|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 0 | - | - | - | 0 | 2 | 5 | 8 | 13 | 17 | 23 |
| 1 | - | - | - | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 20 | 26 |
| 2 | - | - | 0 | 2 | 5 | 8 | 12 | 17 | 23 | 29 |
| 3 | - | - | 0 | 3 | 6 | 10 | 14 | 19 | 26 | 33 |
| 4 | - | - | 1 | 4 | 7 | 11 | 16 | 22 | 28 | 36 |
| 5 | - | - | 2 | 4 | 8 | 13 | 18 | 24 | 31 | 39 |
| 6 | - | 0 | 2 | 5 | 9 | 14 | 20 | 26 | 34 | 42 |
| 7 | - | 0 | 3 | 6 | 11 | 16 | 22 | 29 | 37 | 45 |
| 8 | - | 0 | 3 | 7 | 12 | 17 | 24 | 31 | 39 | 48 |
| 9 | - | 0 | 4 | 8 | 13 | 19 | 26 | 34 | 42 | 52 |
| 10 | - | 1 | 4 | 9 | 14 | 21 | 28 | 36 | 45 | 55 |
| 11 | - | 1 | 5 | 10 | 15 | 22 | 30 | 38 | 48 | |
| 12 | - | 1 | 5 | 11 | 17 | 24 | 32 | 41 | 50 | |
| 13 | - | 1 | 6 | 11 | 18 | 25 | 34 | 43 | | |
| 14 | - | 1 | 6 | 12 | 19 | 27 | 36 | 45 | | |
| ... | | | | | | | | | | |
| 18 | - | 2 | 8 | 16 | 24 | 33 | | | | |
| 19 | - | 3 | 9 | 17 | 25 | | | | | |
| 20 | - | 3 | 9 | 17 | 27 | | | | | |

Ici c'est la table avec $\alpha = 5\%$

On regarde le plus petit des 2 effectifs sur les colonnes et la différence $n_2 - n_1$ sur les lignes

Ex : $n_1 = 10$ et $n_2 = 10$: $n_2 - n_1 = 0$ donc $U_t = 23$

r' de Spearman :

Ici le paramètre Z est r'

$$\blacktriangleright r' = 1 - \frac{6 \sum d_i^2}{n(n^2 - 1)}$$

Si $r'_c > r'_t$ -> on ACCEPTE H_0

Exemple : On prend la note de 6 étudiants en biostatistiques et leur classement au concours PACES

| | | | | | | |
|--------------|------|-----|------|-----|------|----|
| X biostat | 12,4 | 4,9 | 18,1 | 5,4 | 19,4 | 16 |
| Y classement | 210 | 555 | 6 | 445 | 5 | 14 |

H_0 : il n'y a pas de lien entre ces 2 séries de valeurs numériques, il s'agit de 2 séries indépendantes

Variable 1 : note → quantitative

Variable 2 : classement → pseudo-quantitative

On associe à chaque X et à chaque Y un rang. On calcule d_i la différence entre le rang X et le rang Y et d_i^2

| | | | | | | |
|---------------------|------|-----|------|-----|------|----|
| <i>X Biostat</i> | 12,4 | 4,9 | 18,1 | 5,4 | 19,4 | 16 |
| <i>Rang X</i> | 3 | 1 | 5 | 2 | 6 | 4 |
| <i>Y Classement</i> | 210 | 555 | 6 | 445 | 5 | 14 |
| <i>Rang Y</i> | 4 | 6 | 2 | 5 | 1 | 3 |
| d_i | -1 | -5 | 3 | -3 | 5 | 1 |
| d_i^2 | 1 | 25 | 9 | 9 | 25 | 1 |

Dans la table, avec $n = 6$ et $\alpha = 5\%$, $r'_t = 0,89$. Avec $\alpha = 1\%$, $r'_t = 1$

$r'_c = -1 < r'_t$: on rejette H_0

Il y a un lien significatif entre ces 2 séries. Plus la note de biostat est élevée, plus le classement est petit (d'où le signe – devant r'_c)

| | Variables quantitatives | Variables qualitatives | Variables qualitative - quantitative |
|----------------------------------|---|--|---|
| 4 < n < 12 (non paramétrique) | r' de Spearman | Comparaison des pourcentages X^2 | U de Mann et Whitney |
| 12 ≤ n < 30 | Coefficient de corrélation r' de Spearman | Comparaison des pourcentages X^2 | T de student U de Mann et Whitney |
| 30 ≤ n | Coefficient de corrélation r' de Spearman | Comparaison des pourcentages X^2 | Comparaison des moyennes T de student U de Mann et Whitney |

On peut utiliser un test pour des effectifs supérieurs mais pas pour des effectifs inférieurs.

Remarque : le choix du test le plus approprié ne dépend pas que de l'effectif, il y a d'autres facteurs à prendre en compte (que l'on ne vous demande pas de connaître). Cela explique pourquoi le prof peut utiliser un test t de student avec un effectif de 10.

Dédicaaaaaaaaces !!!!! Après 1 an je peux enfin en faire :)

Dédi à mon chat, qui a failli me faire rater l'année à force de me déconcentrer

Dédi aux gens qui disent bonjour dans la rue

Dédi aux gens qui disent bonjour tout cours

Dédi à Baqué qui nous a tous trollé au concours

Dédi à mon addiction aux cacahuètes

Dédi aux LAS histoire les goats (et aux autres, car je suis tenu à l'équité entre toutes les majeures)

Et enfin dédié à moi, pour avoir codé manuellement sur libroffice toutes les ***** de formules de ***** car je pouvais pas copier-coller depuis word -_-