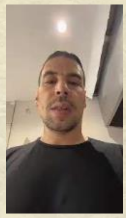
VARIABLE ALEATOIRE ET LOI DE PROBABILITE DISCRETE ET CONTINUE

C'est un cours assez compliqué, j'espère que tu t'es enfilé ton meilleur brodwich mon brozer, donc c parti MOOOOOONSTRE !



I. DEFINITIONS

Dans ce cours on décrira des opérations précises (= épreuve) menant à un résultat aléatoire (=un évènement élémentaire).

On parle de variable aléatoire quand le résultat est un nombre. Une variable aléatoire est donc une épreuve menant à des évènements élémentaires qui sont des nombres.

Ex : lancer un dé est une variable aléatoire (résultat de 1 à 6), mais pas tirer une carte de jeu car les évènements ne sont ici pas des nombres.

On distingue les variables aléatoires discrètes et continues :

- Discrète si le résultat fait partie d'un ensemble fini ou dénombrable. Ex : le nombre de pages de tes ronéos d'histologie.

- Continue si le résultat est compris dans $\mathbb{R}$ ou un intervalle de $\mathbb{R}$. On l'appelle aussi variable à densité. Ex : dosage de la glycémie.

II. VARIABLES ALEATOIRES DISCRETES

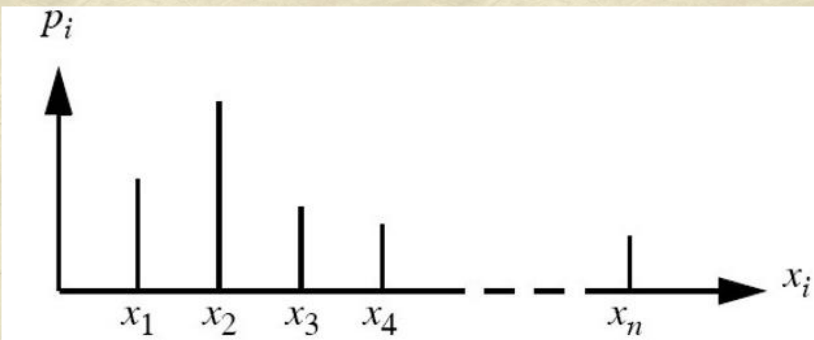
La loi de probabilité d'une variable aléatoire X discrète est définie en donnant l'ensemble des valeurs $p1, p2, \cdots, pn$ qui sont les probabilités de ses différentes éventualités $x1, x2 \dots, xn$.

Soit $pi = P(X = xi)$ donc $0 \leq pi \leq 1$ et $\Sigma\, pi = 1$

On peut représenter cette loi par une table :

x_1	x_2	...	x_n	...
p_1	p_2	...	p_n	...

Ou par un diagramme en baton :



Les différents paramètres :

• **MOYENNE** : la moyenne μ de la variable aléatoire X est la valeur moyenne des résultats que l'on obtiendrait en répétant indéfiniment l'épreuve. C'est un indicateur de position.

$$\mu = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n = \sum_{i=1}^{i=n} x_ip_i$$

La moyenne de $x^2 \neq \mu^2$

• **ESPERANCE** : notée E(X), c'est un synonyme de la moyenne en probabilités et statistiques.

Théorèmes de l'espérance :

- Soit X une variable aléatoire et k une constante réelle :

$$\begin{cases} E(kX) = k\,E(X) \\ E(k + X) = E(X) + k \end{cases}$$

- Soit X et Y deux variables aléatoires : E(X+Y) = E(X) + E(Y)

On peut généraliser cette dernière formule en disant que « l'Espérance de la somme est la somme des Espérances ».

• **VARIANCE et ECART-TYPE** : Notée σ^2, la variance est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne. L'écart-type est sa racine carrée, σ. Ce sont des paramètres de dispersion.

Soit a une constante on a : Var(X+a) = Var(X) et Var(aX) = a^2Var(X)

➔ Donc la variance de valeur donné en C° et en K sont les memes si elles correspondent aux meme temperature

• **VARIABLE CENTREE REDUITE** : on la définit comme

Soustraire sa moyenne à X permet de la « centrer ». La diviser par son écart-type permet d'avoir une variable « réduite ».

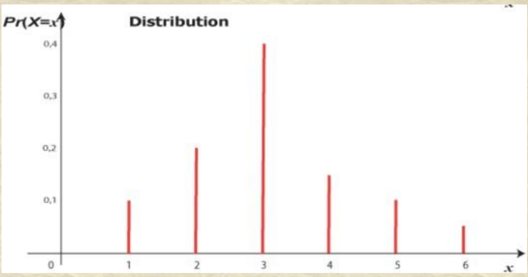
On a alors E(Y) = 0 et Var (Y) = 1 $\quad Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$

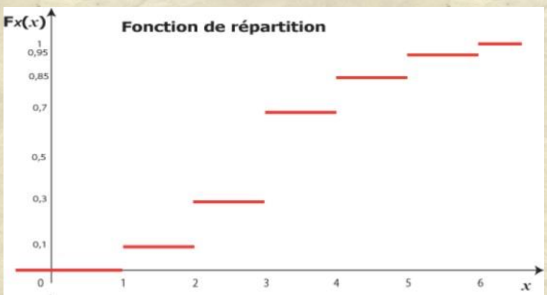
• **FONCTION DE REPARTITION** : on la définit comme **F(x) = P(X≤x)**. C'est une fonction **cumulative** car on additionne toutes les probabilités (pi) des xi survenus avant x. C'est une fonction toujours monotone croissante.

Ex : la probabilité d'obtenir un chiffre inférieur ou égal à 2 au cours d'un lancer de dé est égal à la probabilité de tirer un 1 + la probabilité de tirer un 2.

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$$

La fonction de répartition est à bien distinguer de la fonction de distribution





La fonction de répartition est une fonction en escalier pour les variables aléatoires discrètes.
Les discontinuités de x se produisent pour les valeurs de x ayant des probabilités non nulles.
La hauteur de la discontinuité est la probabilité de X=x.

Ex : Obtenir 2 = Distribution
Obtenir une valeur inferieur à 2 = Repartition

III.LOIS DE PROBABILITE DISCRETES

A. Loi de BERNOULLI B(p)

L'Epreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire dont l'issue est un « succès » ou un « échec ».

Paramètres : **p** : probabilité d'un succès **q** = 1-p : probabilité de l'échec

$$P(X = k) = p^k(1-p)^{1-k} = p^k q^{1-k} \qquad \text{pour} \qquad k \in \{0,1\}$$

X est la variable aléatoire donnant le nombre de « succès » pendant l'épreuve (0 ou 1).

Pour la loi de Bernoulli, on a alors : **μ=p** et **σ² = p(1-p) = pq**

Exemple : On a une boite avec 2 boules rouges et 6 noires. Soit l'événement « tirer une boule noire » le succès avec une probabilité p = $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

Si on tire une boule dans la boite au hasard on suit la loi de Bernoulli et on a :

$$P(X=0) = \frac{3^0}{4}\frac{1^1}{4} = \frac{1}{4} \; et \; P(X=1) = \frac{3^1}{4}\frac{1^0}{4} = \frac{3}{4}$$

B. Loi BINOMIALE B(n,p)

La loi Binomiale consiste en la répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes.

Paramètres : **n** : nombre d'essais indépendants **p** : probabilité d'un succès
q = **1-p** : probabilité d'un échec

X : variable aléatoire donnant le nombre de « succès » à l'issue de n essais (de 0 à n).

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k} \qquad \text{pour} \qquad 0 \le k \le n$$

Rappel : $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ Et Avec : $\mu = np$ et $\sigma^2 = np(1-p) = npq$

Exemple : On reprend une boite avec cette fois 4 boules rouges et 6 noires. Soit l'événement « tirer une boule noire » le succès. On tire trois fois une boule dans cette boite et chaque tirage est indépendant des autres. On cherche la probabilité de tirer une boule noire soit P(X=1).

On a $p = \frac{6}{10}$ et n = 3.

$P(X = 1) = C^1 \left(\frac{6}{10}\right)^1 \left(\frac{4}{10}\right)^2 = \frac{3!}{2!1!} \times 0,6 \times 0,16 = 3 \times 0,096 = 0,288$

Propriétés et Particularités

• **Si p=0,50** la forme du diagramme de probabilités d'une distribution normale est symétrique

Si p>0,50 on parle d'asymétrie positive. **Si p<0,50** on parle d'asymétrie négative.

• Quand n est grand la forme devient symétrique. Quand n est grand et si p n'est pas trop proche de 0 ni de 1 alors la loi binomiale tend vers la loi normale.

• La loi Binomiale repose sur le principe du tirage **non exhaustif** (indépendant des autres tirages), cad que les éléments sélectionnés sont remis dans l'échantillon donc p ne varie donc pas.

Mais il existe aussi le tirage **exhaustif** (dépendant des autres tirages) : sans remise donc p varie au fil des tirages.

On définit donc le taux de sondage $\frac{n}{N}$ avec n la taille de l'échantillon et N la taille de la population.

 Si $\frac{n}{N} \leq 0,10$ on applique la loi binomiale (même si le tirage est exhaustif).

 Si $\frac{n}{N} > 0,10$ on applique la loi hypergéométrique.

C. Loi HYPERGEOMETRIQUE H(N,D,n)

Soit une population de N individus parmi lesquels D ont un caractère donné. On prélève un échantillon n de cette population N. Les individus de l'échantillon sont tirés simultanément (l'ordre de tirage n'a pas de sens) et sans remise.

Paramètres : N : effectif de la population
D : nb de personnes présentant le caractère étudié dans la population
D/N : probabilité p d'avoir le caractère étudié

$$P(X = k) = \frac{C_D^k \times C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n} \quad \text{avec} \quad min(0; n-D) \leq k \leq max(n; D)$$

On a donc $\mu = \frac{nD}{N} = np$ et $\sigma^2 = \frac{nD}{N} \times \frac{N-D}{N} \times \frac{N-n}{N-1} = npq \times \frac{N-n}{N-1}$

Exemple : Dans une usine, il y a 1000 machines dont 200 ont des défauts. On tire au sort 300 machines dans cette population. Quelle est la probabilité que la moitié de cet échantillon ait desdéfauts ?

$$P(X = 150) = \frac{C_{200}^{150} \times C_{800}^{150}}{C_{1000}^{300}}$$

La loi Hypergéométrique et la loi Binomiale sont proches, et ont la même Espérance.

Leur variance n'est cependant pas tout à fait identique puisqu'il existe le facteur $\frac{N-n}{N-1}$ en plus pour l'hypergéométrique.

Cependant, quand le taux de sondage est faible et donc n petit et N grand, ce facteur se rapprochede 1 et la variance se rapproche donc de celle de la Binomiale.

On comprend donc mieux les conditions d'approximation.

D. Loi GEOMETRIQUE G(p)

On répète des épreuves de Bernoulli jusqu'à l'obtention d'un succès.

Paramètres : X : variable aléatoire « nb d'essais nécessaires » à l'obtention du 1er succès
p : probabilité d'un succès q : probabilité d'un échec

$$P(X = k) = p(1-p)^{k-1} = pq^{k-1} \qquad \text{pour} \qquad k \in \mathbb{N}^*$$

On a alors $\mu = \frac{1}{P}$ et $\sigma^2 = \frac{1-p}{p2}$

Exemple : On lance un dé à six faces jusqu'à obtenir un « 6 ». La probabilité d'obtenir un 6 au bout de 3 essais est :

$$P(X = 3) = \frac{1}{6} \times (\frac{5}{6})^2 = \frac{25}{21}$$

E. Loi de POISSON P(λ)

Elle est utilisée le plus souvent pour déterminer la probabilité qu'un certain nombre d'événements interviennent sur la base d'une unité de temps (ou d'autres unités : volume, surface, etc…).

On la retrouve souvent dans les domaines de la qualité, la sécurité et la fiabilité.

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \qquad \lambda > 0 \qquad k \in \mathbb{N} \qquad e = 2,71828\ldots$$

Paramètres : **λ** : taux moyen avec lequel un évènement particulier se produit en général.X : variable aléatoire qui donne le nombre d'évènement particulier qui se produisent dans la situation étudiée. $\mu = \sigma^2 = \lambda$

Exemple : Dans le cabinet d'un dermatologue, on a en moyenne quatre consultations en deux heures. Quelle est la probabilité d'avoir une consultation au cours d'une heure ?

On a λ = 4 hospitalisations pour 2h or ici on cherche une probabilité relative à 1h donc on prend λ = 2 hospitalisations pour 1h.

$P(X = 1) = \frac{2 \times e^{-2}}{1!} = 2e^{-2}$

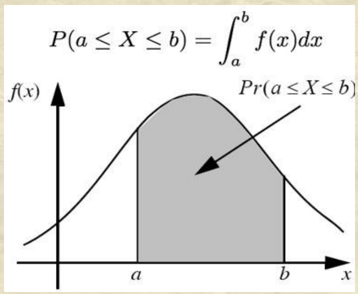
On vient de finir la partie sur les variables aleatoires discrètes, c'est partie pour la suite logique : les variables aleatoires continues, z'est bardiiiiiiii !!!!

IV. VARIABLES ALEATOIRES CONTINUES

Ce qui caractérise une variable aléatoire continue, c'est qu'elle a une probabilité nulle d'être égale à un nombre donné. Donc pas de fonction de Distribution.

$P(X=4) = 0$; $P(X=11,22) = 0$; $P(X=\sqrt{2}) = 0$

On utilisera donc des intervalles : $P(a \leq X \leq b) \neq 0$



- La densité de probabilité :

C'est une fonction utilisée pour définir la loi de probabilité de X.

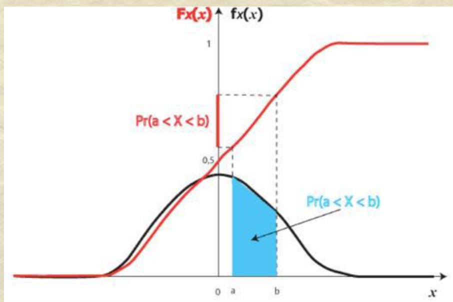
$P(a \leq X \leq b)$ est l'aire sous la courbe.

- La Fonction de Répartition :

Elle est toujours croissante, monotone et continue.

Partant de 0 pour x ⟶ -∞. Atteignant 1 pour x ⟶ +∞ .

(En rouge la fonction de répartition, en noir la fonction de densité)



V. Lois de probabilités continues

A. Loi EXPONENTIELLE E(λ)

Fonction de densité : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ avec $\lambda > 0$ et $x \geq 0$Paramètres :

λ = taux de défaillance instantané

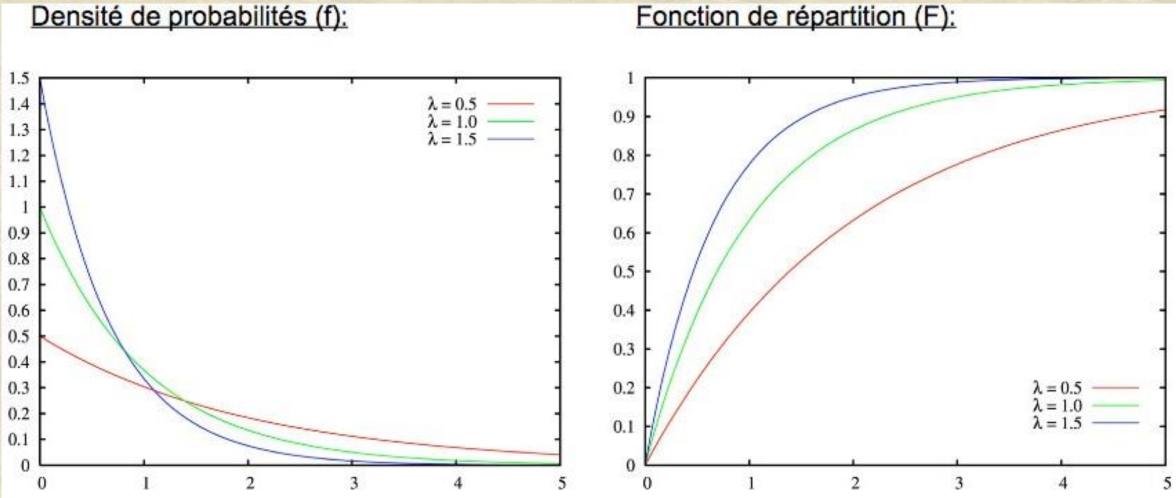
- $\mu = 1 / \lambda$

- $\sigma^2 = 1 / \lambda^2$

Fonction de répartition : $f(x) = P(X \geq x) = \int_0^X \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}$

Si un évènement se réalise selon une loi de Poisson de paramètre λ, le temps entre deux réalisations consécutives de l'évènement considéré est distribué selon une loi exponentielle de paramètre 1/λ

Elle est utilisée pour décrire un processus de mortalité dans lequel le « risque instantané » de décès (ou taux de défaillance) est constant (durée de vie de composants, d'équipements)



Exemple : La radioactivité peut être décrite ainsi et à chaque instant le taux de radioactivité (la probabilité de désintégration) est constant. C'est-à-dire que peu importe le temps écoulé ou le nombre d'atomes déjà désintégrés la probabilité que le noyau se désintègre reste la même pour un instant donné.

B) Loi Uniforme U (a ; b)

Fonction de densité : $f(x) = \frac{1}{b-a}$ si $x \in [a, b]$

$f(x) = 0$ si $x \notin [a, b]$ avec $\lambda > 0$ et $x \geq 0$

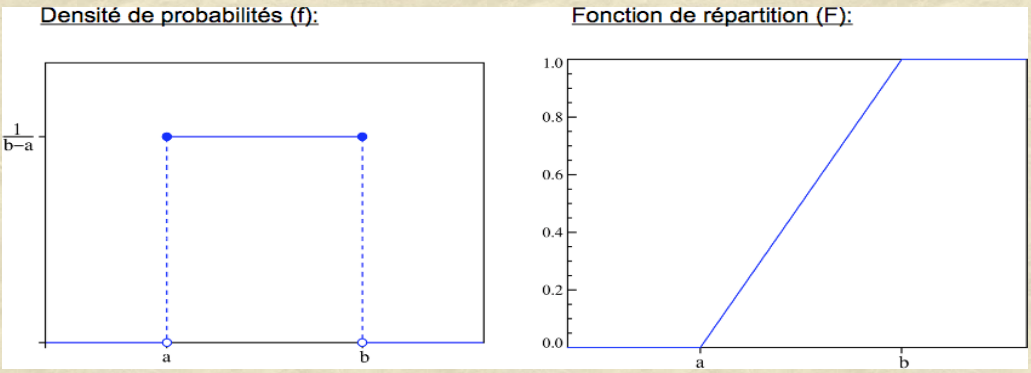
Paramètres : intervalle [a,b] $\in \mathbb{R}$

- $\mu = (a+b) / 2$
- $\sigma^2 = (b-a)^2 / 12$

Toutes les valeurs ont la même probabilité (par exemple un lancer de dé, on a 1/6 de chance pour chaque valeur)

Fonction de densité : f(x) est donc constante sur [a ; b] et nulle en dehors.

Fonction de répartition : F(x) part de 0 pour atteindre 1 de manière linéaire



Exemple : Le boulanger prépare toujours ses croissants avant l'ouverture de la boulangerie.
La préparation des croissants se déroule de 06 :00 à 07 :00. Soit l'événement « les croissants sont prêts ». Sa probabilité est définie par une loi uniforme [06 :00 ; 07 :00].

La probabilité que les croissants soient prêts au moins quinze minutes avant l'ouverture est :

$$\int_{6}^{6,75} \frac{1}{7-6}\,dx = \frac{6,75-6}{7-6} = 0,75$$

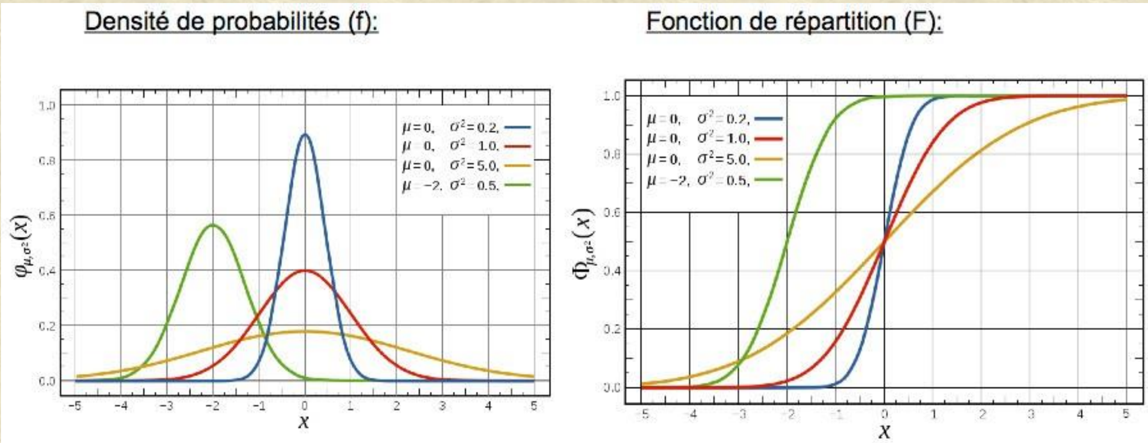
Il y a trois quarts de chance qu'ils soient prêts 1/4 d'heure avant !

C) Loi Normale N(μ ; σ)

Fonction de densité : $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ pour $-\infty \geq x \geq +\infty$

Paramètres : μ et σ, moyenne et écart-type de X

La densité de probabilité d'une v-a normale est symétrique autour de μ et a deux points d'inflexion aux abscisses μ - σ et μ + σ



Valeurs limites importantes à savoir

- il y a 10 chances sur 100 pour que $X < \mu - 1,65\sigma$ ou $X > \mu + 1,65\sigma$
- il y a 5 chances sur 100 pour que $X < \mu - 1,96\sigma$ ou $X > \mu + 1,96\sigma$
- il y a 1 chance sur 100 pour que $X < \mu - 2,58\sigma$ ou $X > \mu + 2,58\sigma$
- il y a 1 chance sur 1000 pour que $X < \mu - 3,30\sigma$ ou $X > \mu + 3,30\sigma$

Dans la plupart des applications statistiques de la loi normale (en particulier les tests statistiques), on se servira de la seconde ligne : une variable aléatoire distribuée normalement a 5 chances sur 100 de présenter un écart à la moyenne supérieur à $1,96\sigma$ (on arrondit généralement à 2).

Exemple : Le poids des PASS se répartit selon une loi Normale N(μ ;σ) avec μ=60Kg et σ=10Kg. Ainsi 95% des PACES pèsent entre (μ-1,96σ) = (60- 1,96x10) = (60-19.6) = 40,4 et (μ+1,96σ) = (60+ 1,96x10)
= (60+19.6) = 79,6. La taille « X » des hommes adultes suit une loi Normale de moyenne μ = 180 cm et d'écart type σ = 6 cm. La proportion d'homme dont la taille est comprise entre 174 cm (μ-σ) et 186cm (μ+σ) est de 68%. La proportion d'homme dont la taille est inférieure à 168,2 cm (μ - 1,96σ) ou supérieure à 191,8 cm (μ + 1,96σ) est de 2,5% + 2,5% = 5% La proportion d'homme dont la taille est supérieure à 189,9 cm (μ + 1,65σ) est de 5%. La proportion d'homme dont la taille est inférieure à 189,9 cm (μ + 1,65σ) est de 95%.

D. Loi Normale Centrée Réduite N(0 ; 1)

La loi normale centrée réduite est une loi normale de moyenne 0 et de variance 1.

Centrée → Autour de la

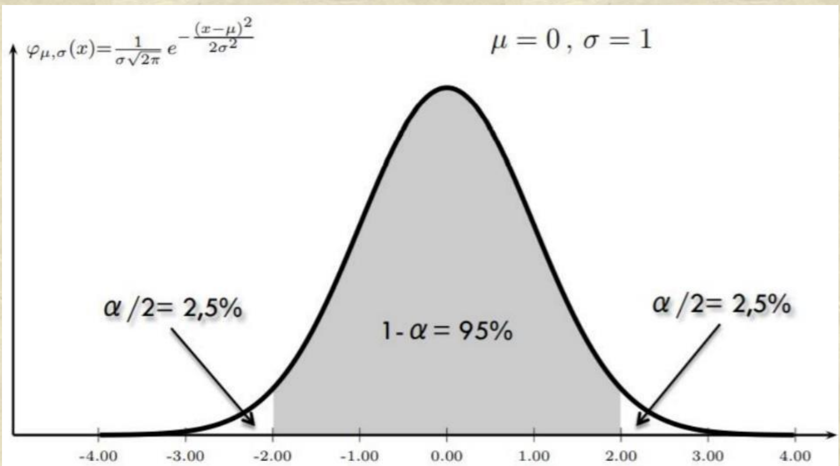
moyenne μ = 0Réduite → Ayant

une variance σ = 1 N(μ; σ) =>

N(0 ; 1)

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Ce changement de variable est très utile en pratique, on peut ramener n'importe quel problème deprobabilité à distribution normale (qui suit donc une loi normale) à un seul cas : celui de la loi normale centrée réduite



VI. APPROXIMATIONS

Certaines lois peuvent être approximées par d'autres selon certaines conditions :

LOIS	CONDITIONS	CONSEQUENCE
BINOMIALE → POISSON	Si **N>50** **p≤0,10** **np ≤ 5**	B(n;p) → P(λ=np)
BINOMIALE → NORMALE	Si **np ≥ 5** **nq ≥ 5**	B(n;p) → N(np;√npq)
POISSON →NORMALE	Si **λ > 25**	P(λ) → N(λ;√ λ)

DEDIS TIME

DEDIS A LA MOINS AIGRI DES AIGRI AKA AKEMI
DEDIS A MARINE MA FABULEUSE CO TUT
DEDIS A BAPTISTE ET NEHELE QUI SONT DES TUTEURS EXCEPTIONNELS
DEDIS A MALEK QUI EST ABSOLUMENT INCRR MAIS IL FAUT QUE TU RECONNAISSE QUE LA CUISINE TUNISIENNE ››› ET QUE LE COUSCOUS EST TUNISIEN
DEDIS A AYA MA FABULEUSE FILLOTE
DEDIS A LA PLUS INCROYABLE DES PERSONNE INCROYABLE, A LA PLUS FABULEUSE DES PERSONNES FABULEUSES, A LA PLUS STYLE DES GENS STYLE AKA IMEN
DEDIS AU PERSONN E QUE J AI DEJA DEDICACE MAIS PAS SUFFISEMENT AKA INAAM LA MEILLEURE DES FUTURS MEDECINS, SALAH CE BIG FUMIER ?, BILAL ET SABRI CES DEUX LUTEURS HORS PAIR, WAEL ET RAYANE LE MEILLEUR DUOS DE FRERE DE MONTEB.
ET PARCE QU UNE PROMESSE CA SE TIENT :

À ma sœur exceptionnelle, un souhait tout spécial, Que ta réussite en médecine brille de mille éclats. Dans cette quête ardente vers la première place, Ta détermination et ta grâce sont ta meilleure grâce.

À travers les nuits blanches, les livres et les cours, Tu as montré une force qui défie tous les détours. Ton esprit brillant et ton cœur débordant d'amour, Sont des atouts précieux qui t'élèvent toujours.

Dans le monde de la médecine, tu es une étoile, Ta passion pour guérir les maux est une boussole. Chaque jour, tu apprends et grandis avec ardeur, Tout cela te mènera vers la plus haute lueur.

Alors, poursuis ton chemin avec confiance et audace, Et tu atteindras la première place, sans menace. Ta persévérance et ton courage sont exceptionnels, Rien ne peut éclipser tes talents essentiels.

Ma sœur, tu es une source d'inspiration sans égale, Que ta lumière continue de briller, telle une étoile. Pour arriver première, tu es destinée, c'est certain, Nous sommes fiers de toi, et te soutenons, main dans la main.