Équations différentielles

Introduction

Une équation différentielle est une équation dont la ou les « inconnue(s) » sont des fonctions.

Exemple d'ED : $3y'+2y = 5$ *(trois fois la dérivée de la fonction y plus deux fois la fonction y égale cinq, faites l'effort de bien lire pour bien comprendre)*

Les équations différentielles ont généralement plusieurs solutions, qui sont appelées **le flot. La plupart des ED ne sont pas solvables de façon analytique.**

Une équation différentielle relie une fonction et ses dérivées successives $F(x, y, y', y'', y^{(n)}) = 0$.

Utilité des équations différentielles :

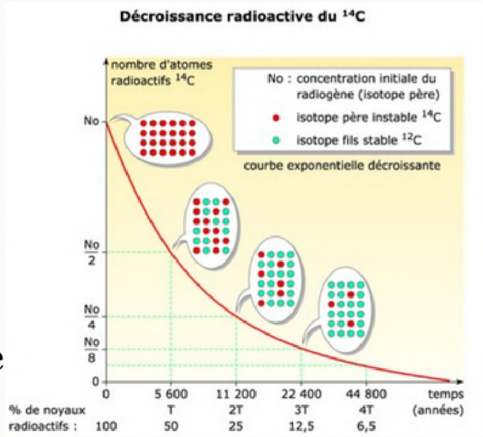
§ Modéliser les oscillations d'un pendule, d'un ressort, d'une corde …

§ Modéliser les circuits électriques

§ Estimer un taux de radioactivité (demi-vie…)

§ Dater au Carbone 14

§ Modéliser des systèmes complexes (comme par exemple le modèle proies –prédateurs)



Équation différentielle du premier ordre

Une équation différentielle est du premier ordre si la fonction y est dérivée une seule fois

> Soit E un espace vectoriel normé complet sur R. On appelle équation différentielle du premier ordre une équation de la forme $y'=f(x,y)$, où f est une application continue sur un ouvert U de R × E à valeurs dans E.
>
> On appelle solution de cette équation une application φ dérivable sur un intervalle I de R à valeurs dans E telle que, pour tout point x de I, $(x, \varphi(x))$ appartienne à U et que : $\varphi'(x)=f(x, \varphi(x))$

C'est la définition mathématique donné par le professeur, peu probable que ça tombe tel quel

Équation différentielle de premier ordre (=ED 1) sans second membre :

Toute ED 1 sans second membre s'écrit de la forme : y'+ay=0 (E) où a est un réel quelconque. y=0 est une solution dite évidente de (E) donc on peut dire qu'une **ED 1 a toujours une solution**.

Une solution de l'équation différentielle **y' = ay** est : Ce^{ax} avec $C \in \mathbb{R}$
("C" est une constante qu'on ne cherche pas à calculer)

On obtient ce résultat grâce à la méthode de séparation des variables

Une solution de l'ED **y'+ay = 0** est Ce^{-ax} . Attention aux signes des solutions

Exemple : 7y'+ y = 0

1. On met sous la forme y' = ay. Dans notre cas ça nous fait $7y' = -y$
2. On divise par 7 des deux côtés et on trouve $a = -\frac{1}{7}$
3. On replace dans la formule et on trouve la solution $Ce^{-\frac{1}{7}x}$

Équation différentielle de premier ordre (=ED 1) avec second membre :

Une ED1 avec second membre est de la forme **y'+ay = b (E')** avec a et b des réels quelconques.

Une ED 1 avec second membre a toujours une solution notamment :

$$y_0 = -\frac{b}{a}$$

Une solution de l'équation différentielle y' = ay + b est : $Ce^{ax} - \frac{b}{a}$

C'est la somme de l'équation sans second membre et d'une solution particulière y_0

Exemple : 4y'- 2y = 6

1. On met sous la forme y' = ay + b. Dans notre cas ça nous fait $4y' = 2y + 6$
2. On divise par 4 des deux côtés et on trouve $a = \frac{2}{4} = 0{,}5$ et $b = \frac{6}{4} = 1{,}5$
3. On replace dans la formule et on trouve la solution : $Ce^{0{,}5x} + \frac{1{,}5}{0{,}5}$

Équation différentielle de premier ordre (=ED 1) avec fonction en second membre :

Lorsque le second membre est une fonction on utilise la méthode de variation de la constante suivie d'une intégration.

théorème 1 :

Théorème : (Equation différentielle $y' + a(x)y = b(x)$)
Soient $a, b \in \mathcal{C}(I, K)$, A une primitive de a sur I, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$.
Il existe une unique solution sur I de l'équation $y' + a(x)y = b(x)$ telle que $y(x_0) = y_0$; elle est définie par :

$$\forall x \in I, y(x) = y_0 e^{A(x_0)-A(x)} + \int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)-A(x)}dt.$$

théorème 2 :

Théorème : (Equation différentielle $y' + a(x)y = b(x)$, solutions générale et particulière)
Soient $a, b \in \mathcal{C}(I, K)$, A une primitive de a sur I, $\bar{y}$ une solution particulière de l'équation $y' + a(x)y = b(x)$ sur I. Soit de plus y une fonction dérivable sur I. Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) $y' + ay = b$ sur I.
(ii) Il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que, sur I, on ait

$$\underbrace{y}_{\text{solution générale de l'équation avec second membre}} = \underbrace{\bar{y}}_{\text{solution particulière}} + \underbrace{\lambda e^{-A}}_{\text{solution générale de l'équation homogène}}$$

En d'autres termes, si on connaît une solution particulière de l'équation $y' + a(x)y = b(x)$, alors on en connaît toutes les solutions.

À retenir : solution générale = solution générale ED homogène + solution particulière

Exemple : $y' - y = (x+1)e^x$

1. On cherche une solution générale de l'équation homogène : y'- y = 0 : c'est une ED1 sans second membre : une solution est de la forme Ce^x
2. On cherche une solution particulière. On propose : y = $(\frac{x^2}{2} + x)\, e^x$, on va regarder si cette fonction vérifie l'équation y' – y = (x+1) e^x
3. On dérive $(\frac{x^2}{2} + x)\, e^x$, de la forme (uv)' = u'v + uv'. y' = $(x+1)\, e^x + \left(\frac{x^2}{2} + x\right) e^x$
4. On remplace dans l'équation : y' – y = $(x+1)\, e^x + \left(\frac{x^2}{2} + x\right) e^x - ((\frac{x^2}{2} + x)\, e^x)$
   $= xe^x + e^x + \frac{x^2}{2}e^x + xe^x - \frac{x^2}{2}e^x - xe^x = xe^x + e^x$
5. On compare le résultat obtenu à l'équation de base : y' – y = (x+1) e^x = $xe^x + e^x$
6. On additionne la solution particulière qu'on a trouvé à une solution générale de l'équation homogène : (x+1) e^x + Ce^x = (x+1+C) e^x
   Une solution générale de l'équation avec second membre est (x+1+C) e^x

Exemple de la tut de l'année dernière Madeline, vraiment une vaillante

Équation différentielle du second ordre

Les équations différentielles d'ordre deux sont des équations où la fonction y est dérivée deux fois (y'')

Équation différentielle de second ordre (=ED 2) sans second membre :

Cette partie "ED 2 sans second membre" résume ce que le prof dit dans les diapos 26 et 27 si vous voulez le jargon mathématique exacte

Une ED 2 homogène est de la forme **ay'' + by' + cy = 0** avec **a ≠ 0**

On associe cette équation à un polynôme caractéristique : $ax^2 + bx + c = 0$

On peut calculer son discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$

En fonction de la valeur du discriminant (supérieur, égale ou inférieur à 0), on a plusieurs cas :

1. $\Delta > 0$

On calcule les racines du polynôme : $\dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ **et on les replace dans la solution :**

$$C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

Exemple : 4y'' + 6y' + 2y = 0

1. On calcule notre discriminant : $\Delta = 6^2 - 4 \times 4 \times 2 = 4$
2. On calcule nos racines : $\frac{-6+\sqrt{4}}{2\times 4} = -\frac{1}{2}$ et $\frac{-6-\sqrt{4}}{2\times 4} = -1$
3. On replace dans la formule et on trouve la solution : $C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 e^{-x}$

2. $\Delta = 0$

On calcule la racine du polynôme : $\dfrac{-b}{2a}$ **et on les replace dans la solution :**

$$(C_1 x + C_2)e^{rx}$$

Exemple : 5y'' + 10y' + 5y = 0

1. On calcule notre discriminant : $\Delta = 10^2 - 4 \times 5 \times 5 = 0$
2. On calcule la racine : $\frac{-10}{2\times 5} = -1$
3. On replace dans la formule et on trouve la solution : $(C_1 x + C_2)e^{-x}$

3. $\Delta < 0$

On calcule les 2 racines complexes conjuguées : $\dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ **et on les replace dans la solution :** $(C_1 \sin(wx) + C_2 \cos(wx))e^{rx}$

Bon, vu que y'a du nombre complexe ça m'étonnerais très très très fortement que vous ayez à faire ce calcul de racine hein, au max du max ça va vous donner les valeurs à replacer dans la formule je pense (c'est une spéculation je suis pas Irma)

Exemple : 4y'' + 8y' + 5y = 0

1. On calcule notre discriminant : $\Delta = 8^2 - 4 \times 4 \times 5 = -16$
2. On calcule les racines composées de la mort qui tue : $\frac{-8 \pm i\sqrt{16}}{2\times 4} = -1 \pm 0{,}5i$
3. On trouve donc r=-1 et w=0,5i
4. On replace dans la formule et on trouve la solution : $(C_1 \sin(0{,}5x) + C_2 \cos(0{,}5x))e^{-x}$

Équation différentielle de second ordre (=ED 2) avec second membre :

Théorème : (Equation différentielle $ay'' + by' + cy = d(x)$)
Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$ (avec $a \neq 0$), $d \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$, $x_0 \in I$ et $y_0, y_1 \in \mathbb{K}$. Il existe une unique solution sur I de l'équation $ay'' + by' + cy = d(x)$ telle que $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$.

à retenir de ce pavé : Si on fixe un x_0, il n'existe qu'une seule solution à l'équation

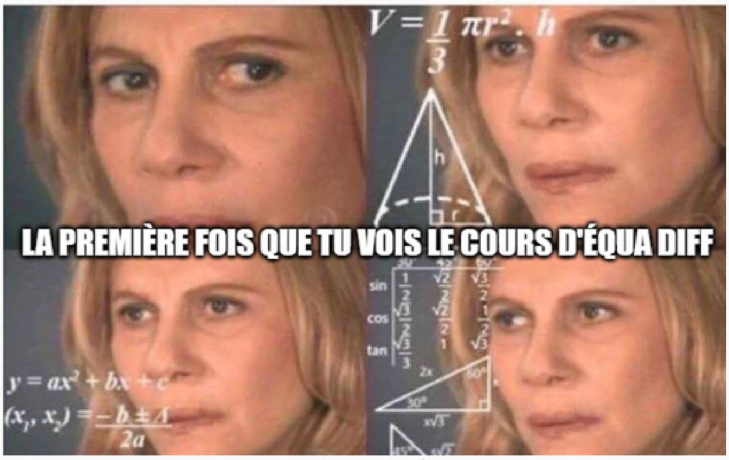
Théorème : (Equation différentielle $ay'' + by' + cy = d(x)$)
Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$ (avec $a \neq 0$), $d \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ et $\bar{y}$ une solution particulière de l'équation $ay'' + by' + cy = d(x)$ sur I. Soit de plus $y : I \to \mathbb{K}$ une application deux fois dérivable sur I. Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) $ay'' + by' + cy = d$ sur I.
(ii)

$$\underbrace{y}_{\text{solution générale de l'équation avec second membre}} = \underbrace{\bar{y}}_{\text{solution particulière}} + \underbrace{\tilde{y}}_{\text{solution générale de l'équation homogène}}$$

En d'autres termes, si on connaît une solution particulière de l'équation $y' + a(x)y = b(x)$, alors on en connaît toutes les solutions.

Comme pour les ED1 : solution générale = solution particulière + solution générale ED homogène

Vous êtes vraiment des bons de réviser ce cours que 70% des P1 impasseront (croyez en mes chiffres je suis tuteur de biostat). Petite pause avant la dernière partie qui est relax



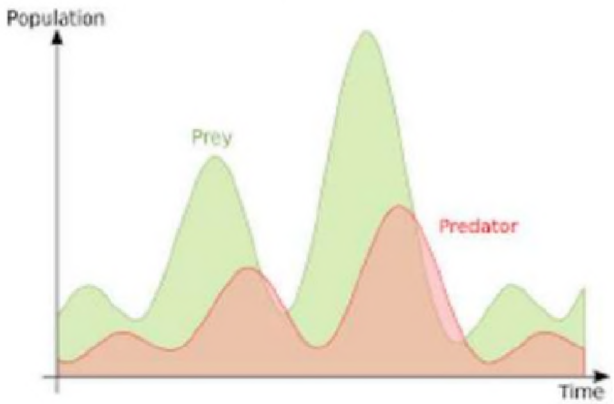
ça va venir tkt

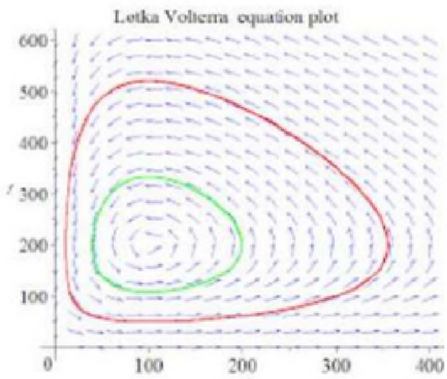
Modèle à base d'équations différentielles

Modèle de Lotka – Volterra

En mathématiques, les équations de prédation de Lotka-Volterra, que l'on désigne aussi sous le terme de « modèle proie-prédateur », sont un couple d'équations différentielles non-linéaires du premier ordre, et sont couramment utilisées pour décrire la dynamique de systèmes biologiques dans lesquels un prédateur et sa proie interagissent.
Dans ce système, **t** désigne le **temps**, **x(t)** l'effectif des **proies**, **y(t)** l'effectif des **prédateurs**, **x'(t)** et **y'(t)** les **variations des populations** au cours du **temps**, **α** le taux de **reproduction des proies**, **β** le taux de **mortalité des proies**, **δ** le taux de r**eproduction des prédateurs** et **γ** le taux de **mortalité des prédateurs**.

On obtient le système suivant : $\begin{cases} x'(t) = x(t)(\alpha - \beta y(t)) \\ y'(t) = y(t)(\delta x(t) - \gamma) \end{cases}$





On ne peut pas résoudre ce système de manière analytique, on va donc dessiner les solutions.

modèle de Verhulst

Verhulst a proposé de modéliser la dynamique de population, le cycle de vie d'une innovation etc.
Ce problème se modélise par une équation différentielle de la forme : $\begin{cases} y(0) = y_0 \\ y' = ry(1 - \frac{y}{K}) \end{cases}$

Autrement dit l'évolution de la population est une fonction de la population et de la population au carré.
Pour résoudre cette équation, il faudrait faire un changement de variable : on pose $z = \frac{1}{y}$

On obtient : $z' = rz\left(1 - \frac{1}{kz}\right) = rz - \frac{r}{k}$

Donc $z' = rz - \frac{r}{k}$ soit une ED 1 avec second membre

Fin. J'ai pas mis d'ajouts notables en terme d'information par rapport à la fiche de Madeline vu que le cours n'a a priori pas changé d'un pouce. J'ai mis un peu de couleur pour rendre la fiche plus agréable, j'espère que l'esthétique vous plaît. Force à vous mes braves

PS (une vidéo motivante pour vous) : https://www.youtube.com/watch?v=dQw4w9WgXcQ