Probabilités élementaires et dénombrement

Sommaire:

1. Intro aux Stats
2. Définition et notation
3. Dénombrements
4. Intro aux probas

La statistique :

- Science qui s'intéresse aux propriétés des populations naturelles

- Grandeur obtenue à partir d'un ensemble de données d'observation

- Un ensemble d'activité qui concourent au recueil,au traitement et à l'interprétation des caractères étudiés

Une population est un ensemble d'objets, d'êtres vivants (population réelle) ou d'objets abstraits (population fictive) de même nature.

Conséquences d'un échantillon:

- **D'observer partiellement la caractéristique** : peut-on extrapoler à la population entière ?

- D'avoir des individus différents à chaque fois que l'on choisit un nouvel échantillon : les mesures seront donc différentes à chaque échantillon.

La théorie des probabilités permet de modéliser les phénomènes où le hasard intervient (jeu de hasard). Cette théorie permet le calcul de cette « extrapolation » de la caractéristique observée sur l’individu. C’est possible seulement si la sélection des individus de l’échantillon à partir de la population a été effectuée au hasard (randomisation)

Ensembles éléments:

- Ensemble: liste ou collection d'objets définis

- Element de l'ensemble: Objet appartenant à l'ensemble

- Il peut aussi se définir en **compréhension** (=implicite/intention/critère), on donne des propriétés caractérisant les éléments. *Ex : A = {x : x est divisible par 2}*

- \- L'ensemble peut se définir en **extension** (=explicit/ listé), on liste tous les éléments un à un. *Ex : A = {1, 3, 5, 7, 9}*

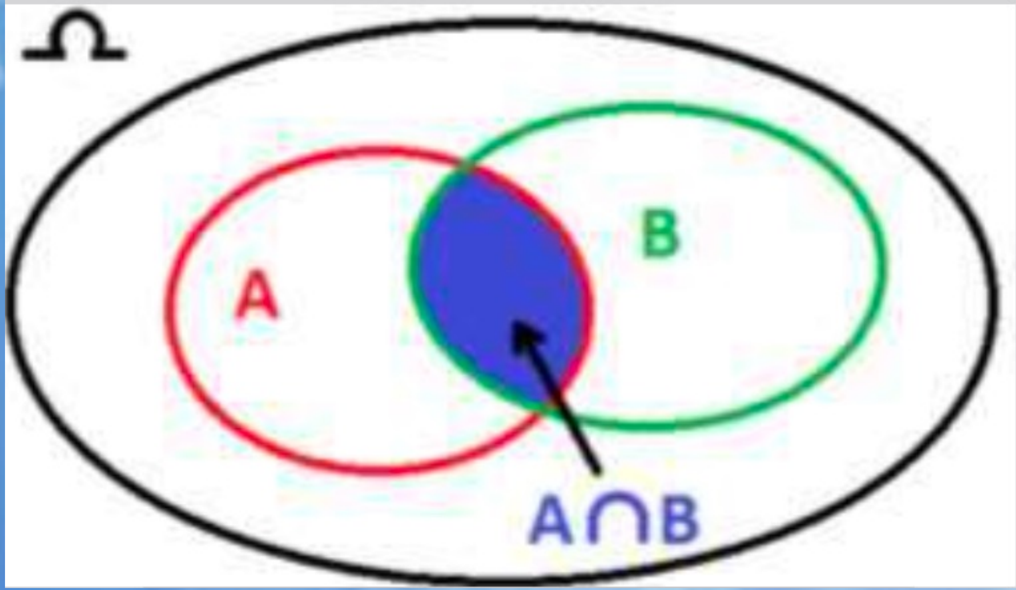
- $p \in A$: p appartient à l'ensemble A.

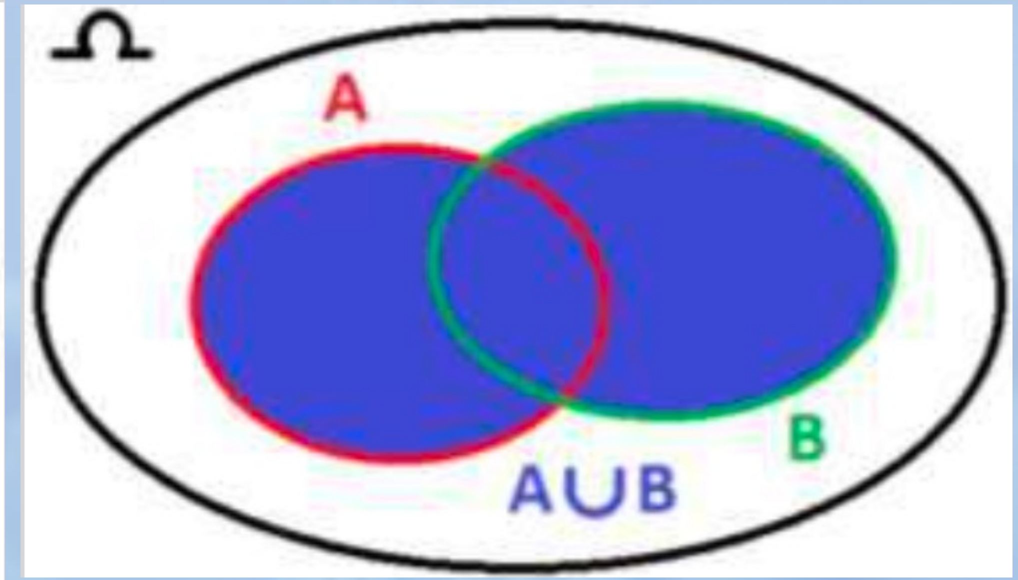
Ex : $A = \{1, 2, 3, 4\}$ et $p = 2$ alors $p \in A$

- $B \subset A$: B est inclus dans A, B est une partie de l'ensemble A.

Ex : $B = \{1, 3\}$ alors $B \subset A$

- $\emptyset$: l'ensemble vide
- Ω : l'ensemble universel aussi noté E



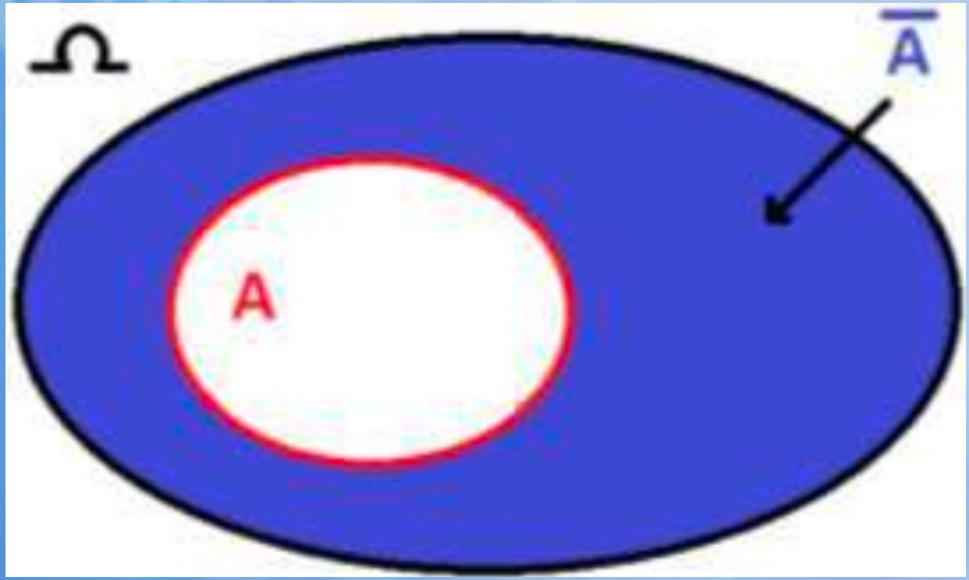


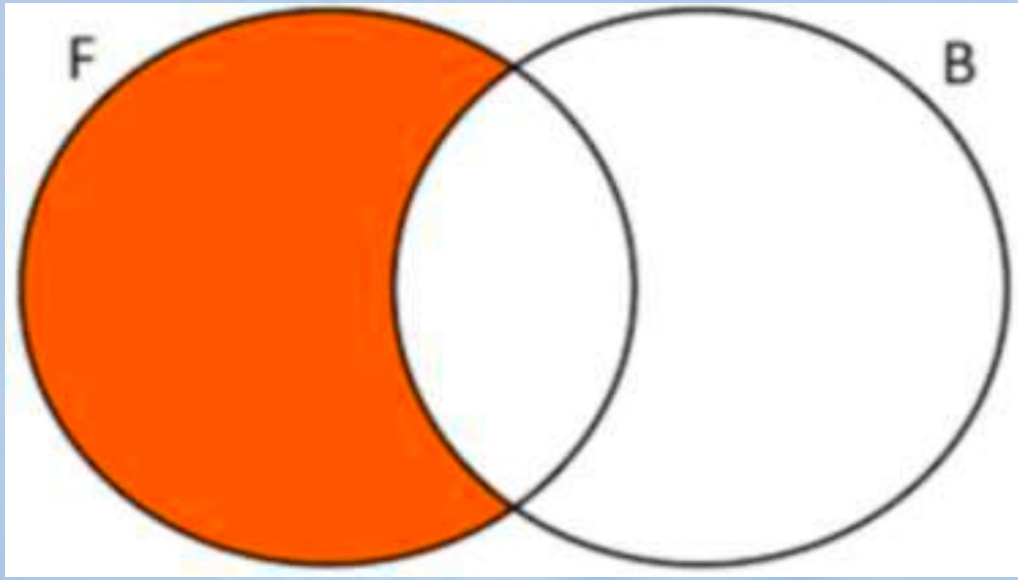
L'INTERSECTION

A∩B SONT LES ÉLÉMENTS QUI APPARTIENNENT À LA FOIS À A ET À B. SI A∩B = Ø:ILN'YAPASDE SOLUTION, LES ENSEMBLES SONT DISJOINTS.

LA RÉUNION

AUB SONT LES ÉLÉMENTS QUI APPARTIENNENT SOIT À A, SOIT À B SOIT AUX 2.





LE COMPLÉMENTAIRE

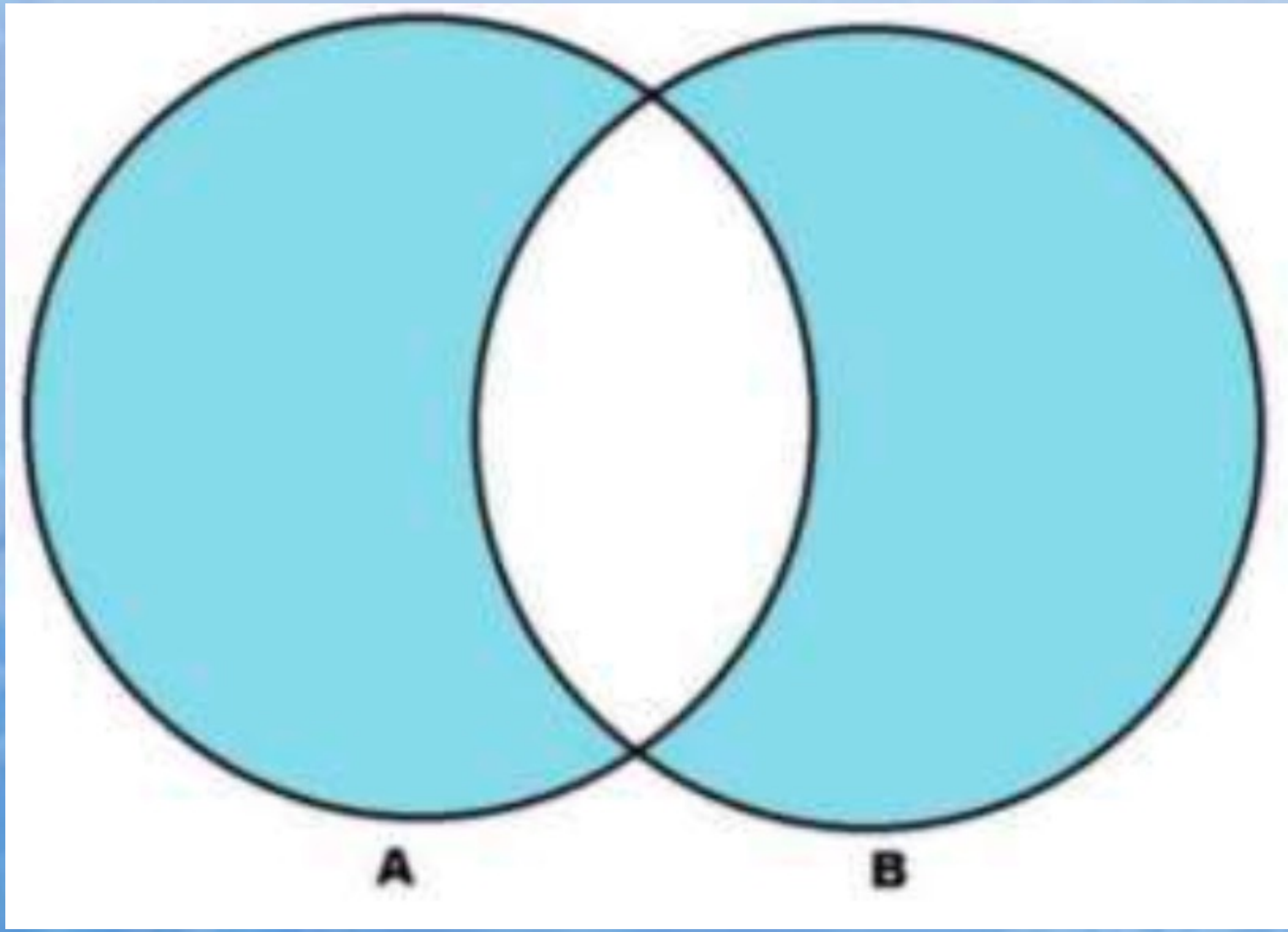
CA REPRÉSENTE TOUT CE QUI N'APPARTIENT PAS À A

LA DIFFÉRENCE

ENTRE A ET B
A-B EST L'ENSEMBLE DES ÉLÉMENTS DE A QUI N'APPARTIENNENT PAS À B

La différence symétrique

$A \Delta B$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent soit à A, soit à B mais pas à $A \cap B$.



IMPORTANT A SAVOIR MAIS SURTOUT IMPORTANT A COMPRENDRE :

$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$A \cup \varnothing = A$	$A \cap \Omega = A$
$A \cup \Omega = \Omega$	$A \cap \varnothing = \varnothing$
$A \cup \complement A = \Omega$	$A \cap \complement A = \varnothing$
$\complement\complement A = A$	$\complement\Omega = \varnothing, \complement\varnothing = \Omega$
$\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$	$\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$

Différents types d'ensembles :

- Ensembles finis:

ensemble nul ou contenat un nombre fini d'éléments

- Ensembles infinis:

1. Dénombrales: chaque élément peut être compté
2. Indénombrales: on ne peut pas compter chaque élément

Les dénombrements:

- Les dénombrements permettent de calculer le nombre de possibilités de tirage dans des situations de probabilité. Il existe différentes formules en fonction des différentes situations que l'on peut rencontrer.

Avec remise		Sans remise			
Ordonné		Ordonné			Non ordonné
p-liste avec remise	**Arrangements avec répétition**	**Arrangements de n éléments pris p à p**	**Permutation d'un ensemble fini à n éléments**	**Permutations avec répétition**	**Combinaisons de n éléments pris p à p parties d'un ensemble**
On prend 1 élément dans E, on le remet et on répète p fois	On prend 1 élément dans n, on le remet et on répète p fois	On prend SUCCESSIVEMENT (=les uns après les autres) p éléments parmi n sans remettre	On prend les éléments 1 à 1 sans les remettre jusqu'à épuisement p = n	On prend les éléments 1 à 1 jusqu'à épuisement en ne tenant compte que des catégories	On prend SIMULTANEMENT (=tous en même temps) p éléments parmi n
$(\text{Card } E)^p$	n^p	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$	$n!$	$\frac{n!}{k_1!\,k_2!\,...\,k_x!}$	$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$

Les probas :

- ● **Les phénomènes déterministes**, dont l’issue est prévisible (les phénomènes physiques)
-
- ● **Les phénomènes aléatoires**, dont l’issue n’est pas prévisible (comme un lancer de dé)
- ● **Une expérience aléatoire** (ou épreuve) est une expérience dont le résultat n’est pas prévisible, c’est donc un phénomène aléatoire.

- En probabilité, on travaille sur un ensemble fondamental (noté Ω) qui représente l’ensemble de tous les résultats possibles.

- Un évènement quant à lui est un sous-ensemble de l’ensemble fondamental.

- Il existe plusieurs types d’évènements :

- - **L’évènement élémentaire (Ω)** : constitué d’un seul résultat de l’ensemble.

  Ex : « Obtenir un 2 » à un lancer de dé

- - **L’évènement impossible ou ensemble vide (Ø)** : ne contient aucun des résultats possibles.

  Ex : « Obtenir un 7 » à un lancer de dé

- **- L’évènement certain** : l’ensemble contient tous les résultats possibles.

  Ex : « obtenir un chiffre » à un lancer de dé

- Une probabilité associe à un évènement un nombre allant de 0 à 1, elle permet de mesurer la chance de réalisation de l'évènement en question.

- Quelques règles à connaitre :

- $P(\emptyset) = 0$: l'évènement impossible ne peut pas se produire • $P(\Omega)=1$

- $P(CA) = 1 - P(A)$

- Si $A \subset B$ (est inclus dans B) alors $P(A) \leq P(B)$ (car A est une partie de B)

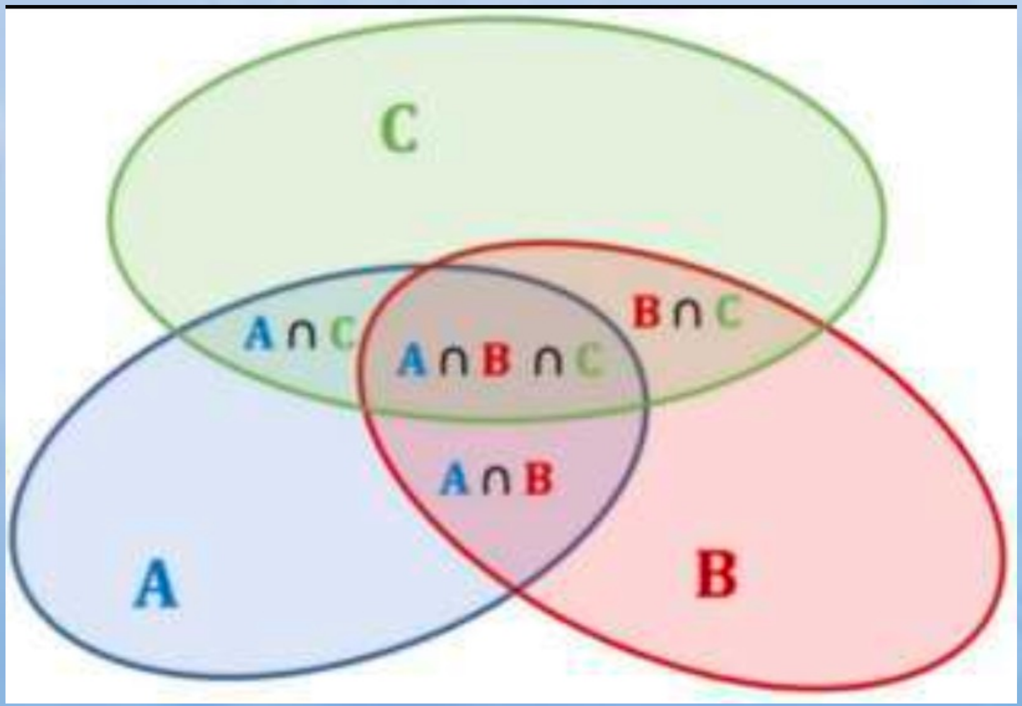
- Si $P(A \cap B) = 0$ alors ils s'excluent mutuellement et A et B sont dits incompatibles.

› Théorème des probabilités totales :

› $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Si A et B sont incompatibles, $P(A \cap B) = 0$ donc $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

- Propriété d'additivité forte ou formule de Poincaré (d'inclusion-exclusion ou de crible) :
- Pour obtenir cette formule on additionne chaque évènement ce qui
- compte 2 fois chaque intersection (et 3 fois celle du milieu). On enlève donc chaque intersection 1 fois mais ça laisse un trou au milieu qu'il faut donc combler.
- $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$
- entrer un sous-titre ici si vous en avez besoin



- Equiprobabilité :

- Lors d’une situation d’équiprobabilité, tous les évènements élémentaires ont la même chance de se produire. La probabilité d’un évènement A est :

$$P(A)=\frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$$ avec Card (A) le nombre

- d’élément de l’évènement (de cas favorables) et Card (Ω) le nombre d’élément de l’univers (de cas possibles)

Probabilité et ensembles :

- ● Pour un ensemble fini, la probabilité d'un évènement est comprise entre 0 et 1. De plus, la somme des probabilités de tous les évènements élémentaires est toujours égale à 1.
- *Ex : considérons un dé biaisé : P(1) = 1/3, P(2) = 1/6, P(3) = 1/12, P(4) = 1/12, P(5) = 1/4.*
- *Trouver P(6) =? 1/3 + 1/6 + 1/12 + 1/12 + 1/4 + ? = 1 → ? = 1 – 11/12 = 1/12*

Donc P(6)=1/12

FIN