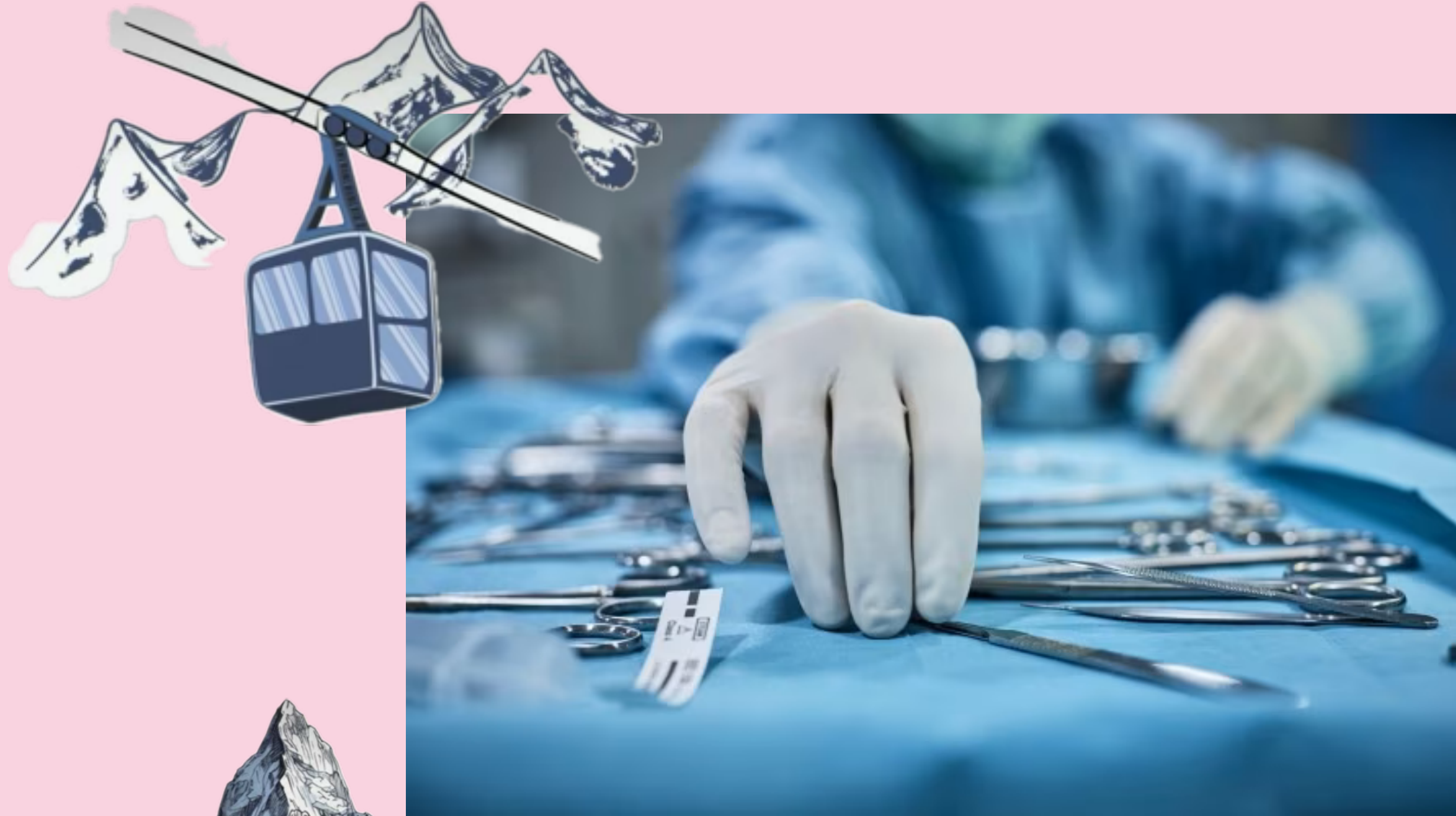


# MATRICES



# LE CALCUL MATRICIEL

Une matrice est un tableau de nombres organisés en lignes et en colonnes, que l'on note sous la forme  $A(\mathbf{n}, \mathbf{p})$ , où  $\mathbf{n}$  représente le nombre de **lignes** et  $\mathbf{p}$  le nombre de **colonnes**.

• Si  $\mathbf{p} = \mathbf{1}$ , c'est-à-dire une seule colonne, on a une **matrice** dite univariée/colonne.

*Exemple :*  $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$

• Si  $\mathbf{p} = \mathbf{ou} > \mathbf{2}$ , c'est à dire plusieurs colonnes, on parle de **matrice multivariée**.

*Exemple :*  $B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

# LE CALCUL MATRICIEL

- **MATRICES CARRÉES** : nombre de lignes égal au nombre de colonnes. On parle de matrice carré d'ordre n.

Par exemple, si  $n = p = 2$  :  $C = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$  Matrice carrée d'ordre 2

- **MATRICE IDENTITÉ** : Elle a tous ses coefficients diagonaux égaux à 1, et tous les autres coefficients sont égaux à 0.

Par exemple, la matrice identité d'ordre 3 est :  $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- **LA TRANSPOSÉE D'UNE MATRICE** : Elle consiste à échanger les lignes et les colonnes.

Exemple :  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$   
Sa transposée, notée  $A^T$ , sera :  
 $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

La transposée de  $A(n,p)$ , notée  $A^t$  est une matrice à **p lignes et n colonnes+++**

Le produit  $A^t * A$  donne une matrice carrée d'ordre p, qui est une matrice symétrique (par rapport à la **diagonale** qui part du coefficient **en haut à gauche** de la matrice). +++

**!LA TRANSPOSÉE D'UNE MATRICE EXISTE TOUJOURS!**

# ENTRAÎNEMENT

*Soit la matrice suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

1. Calculez la transposée de la matrice  $A$
2. Vérifiez que sa transposée est bien une matrice  $3 \times 2$

# CORRECTION 🐱

La transposée d'une matrice est obtenue en échangeant les lignes et les colonnes

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

La transposée a bien 3 lignes et 2 colonnes, donc c'est une matrice 3\*2

# LE CALCUL MATRICIEL

Soit A une matrice carrée d'ordre n.

- 1) A est dite **symétrique** si et seulement si  $A^t = A$
- 2) A est dite **antisymétrique** si et seulement si  $A^t = -A$

Matrice symétrique :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Matrice antisymétrique :

$$\begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

# ENTRAÎNEMENT

Déterminez si les matrices suivantes sont symétriques ou antisymétriques

$$1. \quad E = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2. \quad F = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3. \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

# CORRECTION 🐱

1.  $E$  :

$$E^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = E, \text{ donc } E \text{ est symétrique.}$$

2.  $F$  :

$$F^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = -F, \text{ donc } F \text{ est antisymétrique.}$$

3.  $G$  :

$$G^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \neq G \text{ et } G^T \neq -G, \text{ donc } G \text{ n'est ni symétrique ni antisymétrique.}$$

# LE CALCUL MATRICIEL

- DÉTERMINANT D'UNE MATRICE CARRÉ (D'ORDRE 2)

Le déterminant est un nombre associé à une matrice d'ordre 2 ou 3++

Exemple pour une matrice d'ordre 2 :  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

son déterminant est donnée par : **det = ad - bc**

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

En appliquant la formule : **det = (2\*6)-(3\*1) = 12-3 = 9**

# ENTRAÎNEMENT

Calculez le déterminant de la matrice suivante :

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

# CORRECTION 🐱

La formule pour une matrice  $2 \times 2$  est :  **$\det(D) = ad - bc$**

Avec  $D = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ , on a :

$$\det(D) = (4 \times 6) - (7 \times 2) = 24 - 14 = 10$$

Donc,  $\det(D) = 10$ .

# LE CALCUL MATRICIEL

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

- **DÉTERMINANT D'UNE MATRICE D'ORDRE 3**

Soit la matrice suivante :  $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

- La formule pour calculer le déterminant est :

$$\det(A) = a \cdot \det \begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - b \cdot \det \begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix} + c \cdot \det \begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix}$$

Le déterminant sera utile pour calculer **l'inverse** :

L'inverse d'une matrice n'existe que pour des matrices **carrées** si **det ≠ 0**

Pour  $A$ , on a :

$$\det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

1. Calculons chaque sous-déterminant :

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = (4 \times 6) - (0 \times 5) = 24$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = (0 \times 6) - (1 \times 5) = -5$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (0 \times 0) - (1 \times 4) = -4$$

2. Substituons dans la formule :

$$\det(A) = 1 \cdot 24 - 2 \cdot (-5) + 3 \cdot (-4)$$

$$\det(A) = 24 + 10 - 12 = 22$$

Donc,  $\det(A) = 22$ .

# ENTRAÎNEMENT

Calculez le déterminant de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

# CORRECTION 🐱

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix},$$

on identifie :

$$a = 2, b = 1, c = 3, d = 4, e = -2, f = 1, g = 1, h = 5, i = 0.$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Calculons chaque terme :

$$1. \quad ei - fh = (-2 \times 0) - (1 \times 5) = 0 - 5 = -5,$$

$$2. \quad di - fg = (4 \times 0) - (1 \times 1) = 0 - 1 = -1,$$

$$3. \quad dh - eg = (4 \times 5) - (-2 \times 1) = 20 + 2 = 22.$$

Substituons dans la formule :

$$\det(A) = 2(-5) - 1(-1) + 3(22).$$

$$\det(A) = -10 + 1 + 66 = 57.$$

# LE CALCUL MATRICIEL

- **PRODUIT DE MATRICE**

Pour calculer le produit de deux matrices A et B, il faut que **le nombre de lignes de la deuxième matrice soit égale au nombre de colonnes de la première matrice.**

**!On ne peut pas toujours calculer AB et BA!** et même si c'est possible, les résultats peuvent être différents.

- **PUISSANCE DE MATRICE**

On peut uniquement calculer la puissance d'une matrice carré :  $A * A = A^2$

- **MATRICES COMMUTANTES**

Deux matrices A et B commutent si et seulement si **AB = BA** +++

# MÉTHODE CALCUL AB

Soit deux matrices A et B :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

## Méthode :

1. Vérifier que le nombre de lignes de la matrice B soit égal au nombre de colonnes de la matrice A
2. Faire la somme des produits de chaque **ligne** de **A** avec chaque **colonne** de **B** (première ligne+première colonne, première ligne+deuxième colonne, deuxième ligne+première colonne, deuxième ligne+deuxième colonne)

## *Calcul :*

première ligne+première colonne  $(1*5) + (2*7) = 19$

première ligne+deuxième colonne  $(1*6) + (2*8) = 22$

deuxième ligne+première colonne:  $(3*5) + (4*7) = 43$

deuxième ligne+deuxième colonne:  $(3*6) + (4*8) = 50$

On considère que la matrice  $C = AB$

$$C = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

# ENTRAÎNEMENT

Soit  $A$  et  $B$  :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Calculez  $A \times B$ .
2. Calculez  $B \times A$ .
3. Déterminez si  $A$  et  $B$  commutent ( $A \times B = B \times A$ ).

Soit  $C$  et  $D$  :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculez  $C \times D$ .
2. Calculez  $D \times C$ .
3. Déterminez si  $C$  et  $D$  commutent ( $C \times D = D \times C$ ).

# CORRECTION 1

## 1. Calcul de $A \times B$

On utilise la règle de multiplication des matrices. La matrice résultante  $C = A \times B$  est donnée par :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Effectuons les calculs :

$$C = \begin{pmatrix} (1 \times 3) + (0 \times 0) & (1 \times 0) + (0 \times 4) \\ (0 \times 3) + (2 \times 0) & (0 \times 0) + (2 \times 4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

**$AB = BA$ , les matrices commutent**

## 2. Calcul de $B \times A$

De même, calculons  $D = B \times A$  :

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Effectuons les calculs :

$$D = \begin{pmatrix} (3 \times 1) + (0 \times 0) & (3 \times 0) + (0 \times 2) \\ (0 \times 1) + (4 \times 0) & (0 \times 0) + (4 \times 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

# CORRECTION 2 🐱

## 1. Calcul de $C \times D$

On calcule  $E = C \times D$  :

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Effectuons les calculs :

$$E = \begin{pmatrix} (1 \times 0) + (2 \times 1) & (1 \times 1) + (2 \times 0) \\ (3 \times 0) + (4 \times 1) & (3 \times 1) + (4 \times 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

## 2. Calcul de $D \times C$

On calcule  $F = D \times C$  :

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Effectuons les calculs :

$$F = \begin{pmatrix} (0 \times 1) + (1 \times 3) & (0 \times 2) + (1 \times 4) \\ (1 \times 1) + (0 \times 3) & (1 \times 2) + (0 \times 4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**$CD \neq DC$ , les matrices  
ne commutent pas**

# ANALYSES MULTIVARIÉES/ FACTORIELLES

**Objectif +++ : perte d'information minimale et contrôlée**

2 techniques principales d'analyse factorielle :

- **L'analyse en composantes principales** ou **ACP** : la plus ancienne des deux (**1933**) mais véritablement développée avec l'informatique, employée dans le cadre de variables **quantitatives**, homogènes ou pas
- **L'analyse factorielle des correspondances** ou **AFC** : (**années 70**), pour l'étude de tableaux de contingence (données **qualitatives**)

# ANALYSES MULTIVARIÉES/ FACTORIELLES

D'un point de vue méthodologique, le fonctionnement des deux méthodes, est le même, on ne décrira ici que l'ACP.

- Extraire le **maximum d'informations** sous une **forme simple et cohérente** à partir d'un **ensemble très important de données** (**description synthétique**)

- Permettre de mettre en évidence

-Des **interrelations** entre variables

-Des **ressemblances** ou **oppositions** entre individus

UNIQUEMENT POUR **VARIABLES QUANTITATIVES**++( =/= **QUALITATIVES** POUR AFC)

- Si les données sont assez **homogènes**, on pratique un simple **centrage**.

- Si les données sont assez **hétérogènes**, le **centrer-réduire** est obligatoire (ramène la moyenne

à 0 et l'écart-type à 1). Centrer-réduire les données permet de gommer les effets taille et donne une ACP normée.

**FIN** 🎉🎉

**discord/ forum** : Neuro'lina

**Messenger** : Paolina Lozato

**QRU 2 : A propos des matrices, indiquez la proposition exacte parmi les suivantes :**

- A) La matrice identité est une matrice carrée avec tous les coefficients diagonaux égaux à 1 et tous les autres coefficients nuls
- B) Si  $n=p$ , on parle de matrice rectangle
- C) La transposée d'une matrice existe uniquement pour les matrices rectangles
- D) La matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$  est antisymétrique
- E) Les propositions A, B, C et D sont fausses

**QRU 4 : Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n, indiquez la proposition exacte parmi les suivantes :**

- A) Les matrices commutent
- B)  $AB = BA$
- C) Les produits AB et BA existent
- D) Uniquement un des deux produits existe
- E) Les propositions A, B, C et D sont fausses

**QRU 8 : Soit la matrice  $A \begin{pmatrix} 0 & -7 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$  et la matrice  $B (1 \ 2 \ 6)$**

- A) La matrice A peut être appelée matrice « colonne »
- B) La matrice A est une matrice antisymétrique
- C) On peut calculer le produit  $A*B$
- D) On peut calculer l'inverse de la matrice B
- E) Les propositions A, B, C et D sont fausses

**QRU 10 : A propos des analyses multivariées, indiquez la proposition exacte parmi les suivantes :**

- A) Il existe 3 techniques principales d'analyse factorielle
- B) L'ACP est la plus ancienne
- C) L'AFC est la plus ancienne
- D) D'un point de vue méthodologique, le fonctionnement de ces méthodes est très différent
- E) Les propositions A, B, C et D sont fausses

**QRU 18 : Soit la matrice  $A \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$**

A) Le déterminant de A est égal à 11

B) A n'est pas inversible

D) L'inverse de A est  $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

E) Les propositions A, B, C et D sont fausses

**QRU 15 : Soient A et B deux matrices rectangulaires, indiquez la proposition exacte parmi les suivantes :**

A)  $AB=BA$

B) Les produits AB et BA existent

C) Pour que le produit AB existe, il faut que le nombre de lignes de A soit égal au nombre de colonnes de B

D) Pour que le produit AB existe, il faut que le nombre de lignes de B soit égal au nombre de colonne de A

E) Les propositions A, B, C et D sont fausses

**QCM 20** : Soient **A** et **B** les matrices suivantes  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Quelle(s) proposition(s) parmi les suivantes est (sont) exacte(s) ?

- A) La matrice **A** est symétrique
- B) La matrice **B** est symétrique
- C) La matrice **B** est antisymétrique
- D) Pour toute matrice antisymétrique, on a  ${}^tA + A = 0$
- E) Les propositions **A**, **B**, **C** et **D** sont fausses