MATRICES

TTR S2 LOZATO Paolina

LE CALCUL MATRICIEL

Une matrice est un tableau de nombres organisés en lignes et en colonnes, que l'on note sous la forme **A(n, p)**, où **n** représente le nombre de **lignes** et **p** le nombre de **colonnes**.

•Si **p= 1** , c'est-à-dire une <u>seule colonne</u>, on a une **matrice** dite **<u>univariée</u>/colonne.**

Exemple : $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$

•Si **p= ou >2** , c'est à dire <u>plusieurs colonnes</u>, on parle de **matrice <u>multivariée</u>**.

Exemple : $B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

LE CALCUL MATRICIEL

- **<u>MATRICES CARRÉES</u>** : nombre de lignes <u>égal</u> au nombre de colonnes. On parle de matrice carré d'ordre n.

Par exemple, si n= p= 2 :

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

<u>Matrice carrée d'ordre **2**</u>

- **<u>MATRICE IDENTITÉ</u>** : Elle a tous ses coefficients diagonaux égaux à 1, et tous les autres coefficients sont égaux à 0.

Par exemple, la matrice identité d'ordre 3 est :

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **<u>LA TRANSPOSÉE D'UNE MATRICE</u>** : Elle consiste à échanger les lignes et les colonnes.

Exemple :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Sa transposée, notée A^T, sera :

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

La transposée de **A(n,p)**, notée A^t est une matrice à **p lignes et n colonnes+++**

Le produit A^t*A donne une matrice carrée d'ordre p, qui est une matrice symétrique (par rapport à la **diagonale** qui part du coefficient **en haut à gauche** de la matrice). +++

!LA TRANSPOSÉE D'UNE MATRICE EXISTE TOUJOURS!

ENTRAÎNEMENT 🩺

Soit la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

1. Calculez la transposée de la matrice A

2. Vérifiez que sa transposée est bien une matrice 3*2

CORRECTION 😼

La transposée d'une matrice est obtenue en échangeant les lignes et les colonnes

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

La transposée a bien 3 lignes et 2 colonnes, donc c'est une matrice 3*2

LE CALCUL MATRICIEL

Soit A une matrice carrée d'ordre n.

1) A est dite **symétrique** si et seulement si $A^t = A$

2) A est dite **antisymétrique** si et seulement si $A^t = -A$

Matrice ***<u>symétrique :</u>*** $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

Matrice ***<u>antisymétrique :</u>*** $\begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

ENTRAÎNEMENT 🩺

Déterminez si les matrices suivantes sont symétriques ou antisymétriques

1. $E = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
2. $F = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
3. $G = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

CORRECTION 😼

1. E :
$E^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = E$, donc E est symétrique.

2. F :
$F^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = -F$, donc F est antisymétrique.

3. G :
$G^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \neq G$ et $G^T \neq -G$, donc G n'est ni symétrique ni antisymétrique.

LE CALCUL MATRICIEL

- **<u>DÉTERMINANT D'UNE MATRICE CARRÉ (D'ORDRE 2)</u>**

Le déterminant est un nombre associé à une matrice **<u>d'ordre 2 ou 3</u>++**

Exemple pour une matrice d'ordre 2 : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

son <u>déterminant</u> est donnée par : **det = ad - bc**

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

En appliquant la formule : det = (2*6)-(3*1) =12-3 =9

ENTRAÎNEMENT 🩺

Calculez le déterminant de la matrice suivante :

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

CORRECTION 😼

La formule pour une matrice 2*2 est : **det(D) = ad-bc**

Avec $D = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, on a :

$\det(D) = (4 \times 6) - (7 \times 2) = 24 - 14 = 10$

Donc, $\det(D) = 10$.

LE CALCUL MATRICIEL

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

- **<u>DÉTERMINANT D'UNE MATRICE D'ORDRE 3</u>**

Soit la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

- La formule pour calculer le déterminant est :

$$\det(A) = a \cdot \det\begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - b \cdot \det\begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix} + c \cdot \det\begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix}$$

Pour A, on a :

$$\det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

1. Calculons chaque sous-déterminant :

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = (4 \times 6) - (0 \times 5) = 24$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = (0 \times 6) - (1 \times 5) = -5$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (0 \times 0) - (1 \times 4) = -4$$

2. Substituons dans la formule :

$$\det(A) = 1 \cdot 24 - 2 \cdot (-5) + 3 \cdot (-4)$$

$$\det(A) = 24 + 10 - 12 = 22$$

Donc, $\det(A) = 22$.

Le déterminant sera utile pour calculer **<u>l'inverse</u>** :

L'inverse d'une matrice n'existe que pour des matrices **carrées** si **det=/= 0**

ENTRAÎNEMENT 🩺

Calculez le déterminant de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

CORRECTION 😼

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix},$$

on identifie :

$a = 2,\ b = 1,\ c = 3,\ d = 4,\ e = -2,\ f = 1,\ g = 1,\ h = 5,\ i = 0.$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Calculons chaque terme :

1. $ei - fh = (-2 \times 0) - (1 \times 5) = 0 - 5 = -5$,
2. $di - fg = (4 \times 0) - (1 \times 1) = 0 - 1 = -1$,
3. $dh - eg = (4 \times 5) - (-2 \times 1) = 20 + 2 = 22$.

Substituons dans la formule :

$\det(A) = 2(-5) - 1(-1) + 3(22).$

$$\det(A) = -10 + 1 + 66 = 57.$$

LE CALCUL MATRICIEL

- **<u>PRODUIT DE MATRICE</u>**

Pour calculer le produit de deux matrices A et B, il faut que **le nombre de lignes de la deuxième matrice soit égale au nombre de colonnes de la première matrice.**
!On ne peut pas toujours calculer AB et BA! et même si c'est possible, les résultats peuvent être différents.

- **<u>PUISSANCE DE MATRICE</u>**

On peut uniquement calculer la puissance d'une matrice carré : A*A = A^2

- **<u>MATRICES COMMUTANTES</u>**

Deux matrices A et B commutent si et seulement si **AB = BA** +++

MÉTHODE CALCUL AB

Soit deux matrices A et B : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

Méthode :

1. Vérifier que le nombre de lignes de la matrice B soit égal au nombre de colonnes de la matrice A

2. Faire la somme des produits de chaque **ligne** de **A** avec chaque **colonne** de **B** (première ligne+première colonne, première ligne+deuxième colonne, deuxième ligne+première colonne, deuxième ligne+deuxième colonne)

Calcul :

première ligne+première colonne (1*5) + (2*7) =19

première ligne+deuxième colonne (1*6)+ (2*8) =22

deuxième ligne+première colonne: (3*5)+(4*7) =43

deuxième ligne+deuxième colonne: (3*6)+(4*8) =50

On considère que la matrice C = AB

$$C = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

ENTRAÎNEMENT 🩺

Soit A et B :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Calculez $A \times B$.
2. Calculez $B \times A$.
3. Déterminez si A et B commutent ($A \times B = B \times A$).

Soit C et D :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculez $C \times D$.
2. Calculez $D \times C$.
3. Déterminez si C et D commutent ($C \times D = D \times C$).

CORRECTION 1 😼

1. Calcul de $A \times B$

On utilise la règle de multiplication des matrices. La matrice résultante $C = A \times B$ est donnée par :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Effectuons les calculs :

$$C = \begin{pmatrix} (1 \times 3) + (0 \times 0) & (1 \times 0) + (0 \times 4) \\ (0 \times 3) + (2 \times 0) & (0 \times 0) + (2 \times 4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

2. Calcul de $B \times A$

De même, calculons $D = B \times A$:

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Effectuons les calculs :

$$D = \begin{pmatrix} (3 \times 1) + (0 \times 0) & (3 \times 0) + (0 \times 2) \\ (0 \times 1) + (4 \times 0) & (0 \times 0) + (4 \times 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

AB = BA, les matrices commutent

CORRECTION 2 😼

1. Calcul de $C \times D$

On calcule $E = C \times D$:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Effectuons les calculs :

$$E = \begin{pmatrix} (1 \times 0) + (2 \times 1) & (1 \times 1) + (2 \times 0) \\ (3 \times 0) + (4 \times 1) & (3 \times 1) + (4 \times 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Calcul de $D \times C$

On calcule $F = D \times C$:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Effectuons les calculs :

$$F = \begin{pmatrix} (0 \times 1) + (1 \times 3) & (0 \times 2) + (1 \times 4) \\ (1 \times 1) + (0 \times 3) & (1 \times 2) + (0 \times 4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

CD =/= DC, les matrices ne commutent pas

ANALYSES MULTIVARIÉES/ FACTORIELLES

Objectif +++ : **perte d'information minimale et contrôlée**

2 techniques principales d'analyse factorielle :

- **L'analyse en composantes principales** ou **ACP** : la plus ancienne des deux (**1933**) mais véritablement développée avec l'informatique, employée dans le cadre de variables **quantitatives**, homogènes ou pas
- **L'analyse factorielle des correspondances** ou **AFC** : (**années 70**), pour l'étude de tableaux de contingence (données **qualitatives**)

<u>ANALYSES MULTIVARIÉES/ FACTORIELLES</u>

D'un point de vue méthodologique, le fonctionnement des deux méthodes, est le même, on ne décrira ici que l'ACP.

- Extraire le **maximum d'informations** sous une **forme simple et cohérente** à partir d'un **ensemble très important de données** (**description synthétique**)

- Permettre de mettre en évidence

-Des **interrelations** entre variables

-Des **ressemblances** ou **oppositions** entre individus

UNIQUEMENT POUR **VARIABLES QUANTITATIVES++**(=/= **QUALITATIVES** POUR **AFC**)

- Si les données sont assez **<u>homogènes</u>**, on pratique un simple **<u>centrage</u>**.

- Si les données sont assez **<u>hétérogènes</u>**, le **<u>centrer-réduire</u>** est obligatoire (ramène la moyenne

à 0 et l'écart-type à 1). Centrer–réduire les données permet de gommer les effets taille et donne une ACP

normée.

FIN🥳🥳

discord/ forum : Neuro’lina

Messenger : Paolina Lozato

<u>QRU 2</u> : A propos des matrices, indiquez la proposition exacte parmi les suivantes :

A) La matrice identité est une matrice carrée avec tous les coefficients diagonaux égaux à 1 et tous les autres coefficients nuls
B) Si n=p, on parle de matrice rectangle
C) La transposée d'une matrice existe uniquement pour les matrices rectangles
D) La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ est antisymétrique
E) Les propositions A, B, C et D sont fausses

<u>QRU 4</u> : Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n, indiquez la proposition exacte parmi les suivantes :

A) Les matrices commutent
B) AB = BA
C) Les produits AB et BA existent
D) Uniquement un des deux produits existe
E) Les propositions A, B, C et D sont fausses

<u>QRU 8</u> : Soit la matrice A$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-7} \\ \mathbf{7} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ **et la matrice B** $(\mathbf{1} \;\; \mathbf{2} \;\; \mathbf{6})$

A) La matrice A peut être appelée matrice « colonne »
B) La matrice A est une matrice antisymétrique
C) On peut calculer le produit A*B
D) On peut calculer l'inverse de la matrice B
E) Les propositions A, B, C et D sont fausses

<u>QRU 10</u> : A propos des analyses multivariées, indiquez la proposition exacte parmi les suivantes :

A) Il existe 3 techniques principales d’analyse factorielle
B) L’ACP est la plus ancienne
C) L’AFC est la plus ancienne
D) D’un point de vue méthodologique, le fonctionnement de ces méthodes est très différent
E) Les propositions A, B, C et D sont fausses

<u>QRU 15</u> : Soient A et B deux matrices rectangulaires, indiquez la proposition exacte parmi les suivantes :

A) AB=BA
B) Les produits AB et BA existent
C) Pour que le produit AB existe, il faut que le nombre de lignes de A soit égal au nombre de colonnes de B
D) Pour que le produit AB existe, il faut que le nombre de lignes de B soit égal au nombre de colonne de A
E) Les propositions A, B, C et D sont fausses

<u>QCM 20</u> : Soient A et B les matrices suivantes $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Quelle(s) proposition(s) parmi les suivantes est (sont) exacte(s) ?

A) La matrice A est symétrique
B) La matrice B est symétrique
C) La matrice B est antisymétrique
D) Pour toute matrice antisymétrique, on a ${}^{t}A + A = 0$
E) Les propositions A, B, C et D sont fausses