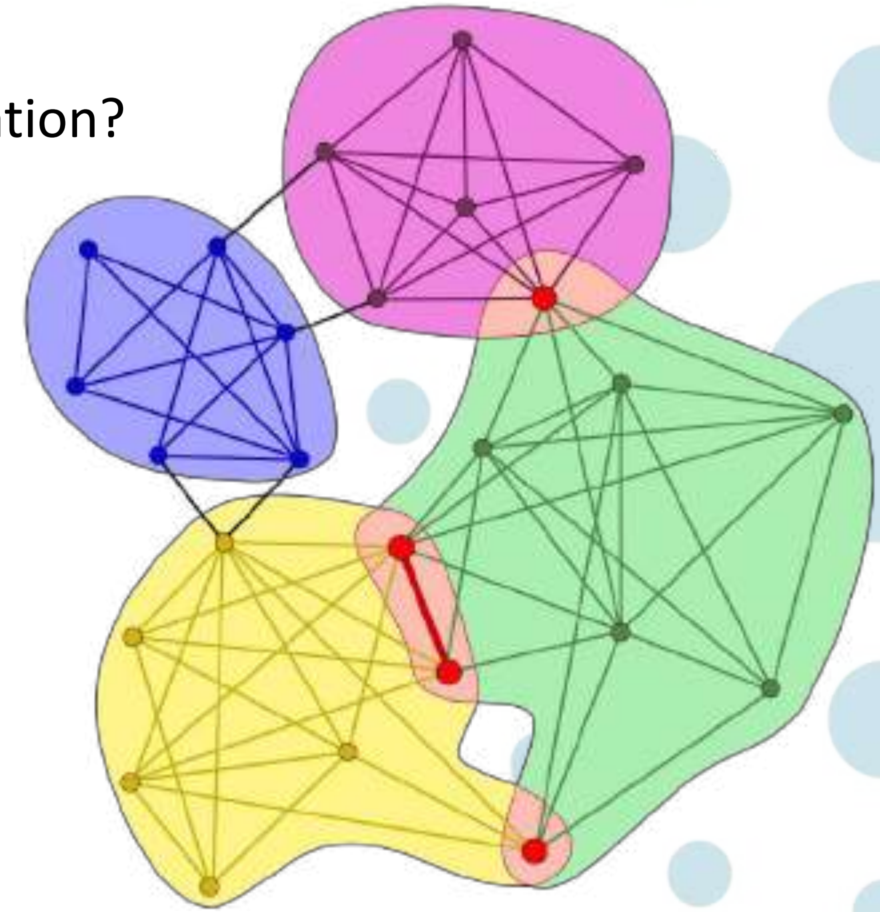
ECUE 5
BIOSTATISTIQUE
ET STATISTIQUES APPLIQUEES

Présentation de l’enseignement

G Maignant, L Lupi, C Pradier, P Staccini (responsable ECUE)

Bases d’algèbre linéaire pour la modélisation en santé

- Pourquoi **modéliser** en santé ? Qu’entendons nous par modélisation?



- Définition de l’algèbre linéaire

- Outils et méthodes de l’algèbre linéaire pour la modélisation en santé

Pourquoi modéliser en santé ? Qu’entendons nous par modélisation?

Modéliser permet de reproduire informatiquement une situation dans le but de tester des scénarios, des configurations

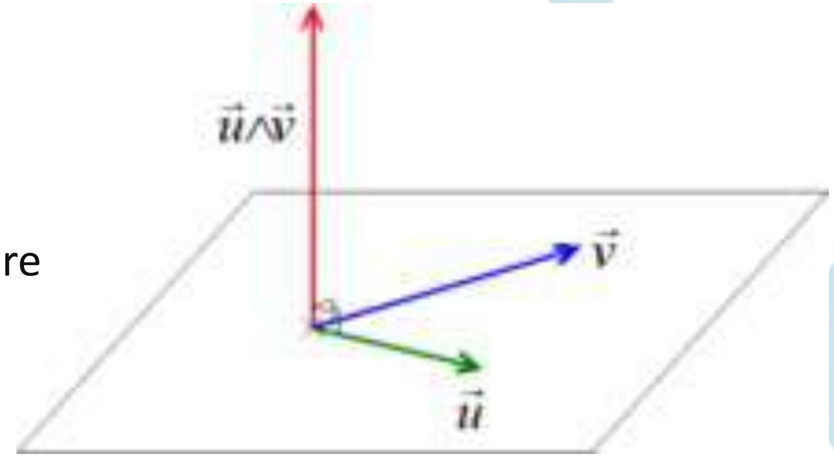
Dans le contexte de Big Data (données massives) c’est-à-dire de données de différentes natures, hétérogènes … il est possible de les structurer dans des grands tableaux (**matrices**) et d’effectuer des opérations mathématiques sur ces matrices (évolution, distances entre profils…).

Par exemple, estimer l’effet d’une augmentation du prix des cigarettes sur le système de santé (maladies, coût pour la société…), on est typiquement dans un **problème multifactoriel** et de Big data (il faut un grand nombre d’individus fumeurs ou non fumeurs pour évaluer cet impact)

Le calcul matriciel est précieux dans le domaine des **statistiques multivariées** (ACP, AFC….)

- **Définition de l'algèbre linéaire**
- Domaine des mathématiques qui étudie les transformations linéaires et les espaces vectoriels.

Un espace vectoriel est une **structure stable** par addition de vecteurs et par multiplication par un scalaire. Autrement dit, on peut ajouter deux éléments d'un tel espace, ou les multiplier par un nombre, le résultat appartiendra encore à l'espace de départ.



Les transformations linéaires et les espaces vectoriels sont des outils pour l'analyse **multivariée de données** dans un contexte de BIG DATA.

Calcul matriciel 1

- Une **matrice** est un tableau de nombres à n lignes et p colonnes : A (n, p), c'est par exemple la donnée de n individus mesurés selon p variables ($p \geq 1$). Si p=1, on parle de univarié, si $p \geq 2$, on parle de multivarié.

Une matrice est dite carrée d'ordre n quand elle a autant de lignes (n) que de colonnes (n).

*Pour calculer le produit de deux matrices A et B, il faut que le nombre de lignes de la deuxième matrice soit égale au nombre de colonnes de la première matrice. Ainsi A(n,p)*B(p, m) = C(n, m)*

Les puissances d'une matrice n'existent que pour des matrices carrés, en effet pour effectuer un produit de matrices il faut que le nombre de lignes de la deuxième matrice soit égale au nombre de colonnes de la première matrice, or dans ce cas B=A et donc n=p.

Calcul matriciel 2

- La **transposée** d'une matrice revient à présenter l'information qui est en colonnes en lignes. Ainsi la transposée de A, notée ${}^tA$ est une matrice à p lignes et n colonnes. Autrement dit, on s'intéresse à p variables déclinées selon n individus.

Lorsque l'on effectue le produit ${}^tA.A$, on obtient une matrice carrée d'ordre p, qui est une matrice **symétrique** (par rapport à la diagonale).

Une matrice est dite **nilpotente** d'ordre n lorsque $A^n=0$ et $A^{n-1}\neq 0$

L'**inverse** d'une matrice n'existe que pour des matrices carrés sous conditions (detA ≠0), il est défini comme A^{-1} tel que $A.\ A^{-1}=I$ où I est la matrice identité c'est-à-dire avec tous les coefficients diagonaux égaux à 1 et tous les autres coefficients nuls.

$$\mathrm{I} = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$ exemple de matrice identité d'ordre 3.

Le **déterminant** d'une matrice (det A) est donné par la formule suivante :

$$\det \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} = a_{1,1}*a_{2,2} - a_{1,2}*a_{2,1}$$

Exemple:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 1*4 - 2*3 = -2$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} =$$

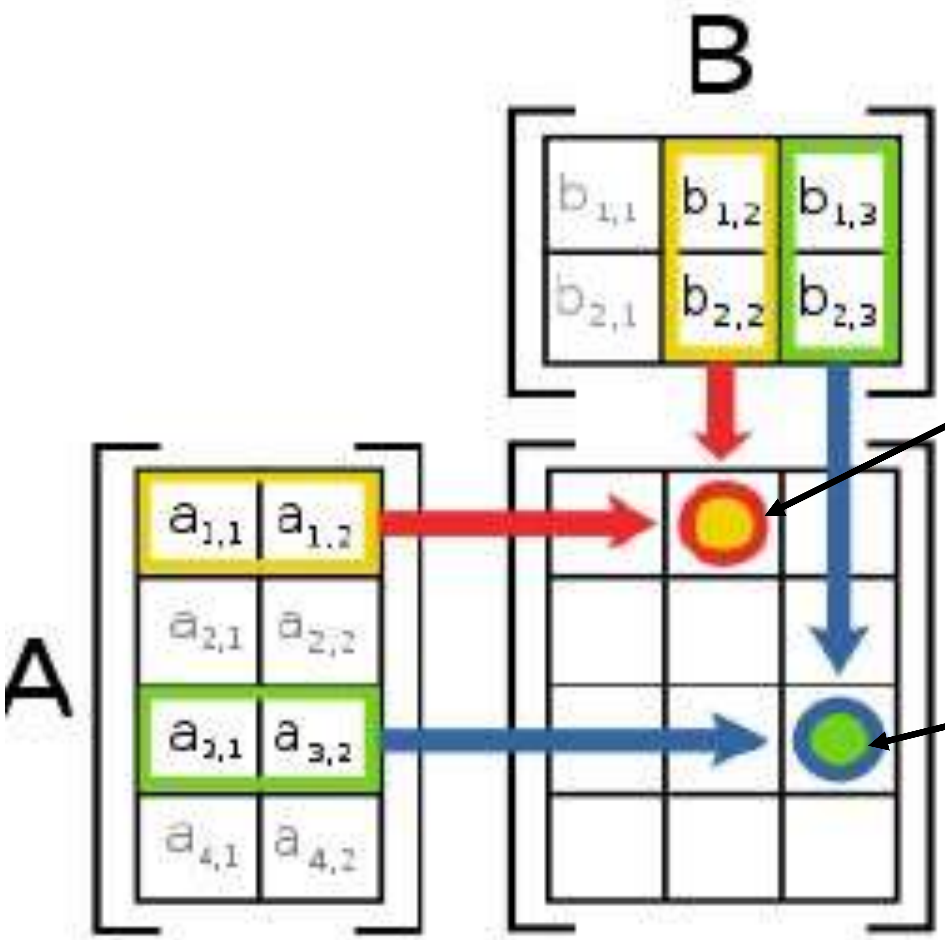
$$= a_{1,1}*\det\begin{bmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} - a_{1,2}*\det\begin{bmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{bmatrix} + a_{1,3}*\det\begin{bmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{bmatrix}$$

Exemple:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = 1*\det\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} - 2*\det\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} + 3*\det\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= 1*(5*9 - 6*8) - 2*(4*9 - 6*7) + 3*(4*8 - 5*7) = 0$$

Calcul matriciel 3 : méthode pour calculer le produit de deux matrices



$a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2}$

$a_{3,1}b_{1,3} + a_{3,2}b_{2,3}$

Calcul matriciel 4

- Dans le cas général, le produit de matrice AB est différent de BA. Il se peut même que l'un des produits n'existe pas.

Si AB = BA on dit que les **matrices commutent**.

On peut avoir un produit de matrices nul sans que l'une des matrices soit nulle.

Exemple :

$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Utilité du calcul matriciel pour les analyses multivariées (analyses factorielles) – modélisation en santé

Le terme **d'analyses factorielles** désigne un ensemble de techniques d'ajustement linéaire dont le but est de résumer l'essentiel de l'information contenue dans des gros tableaux de données (plusieurs dizaines, centaines d'individus observés selon un grand nombre de variables (supérieures à 100 par exemple).

Le procédé consiste à passer d'un espace de grandes dimensions à un espace plus petit (factorisation du tableau de données) avec une perte d'information minimale et contrôlée.

2 techniques principales d'analyse factorielle :

- L'analyse en **composantes principales** ou ACP : la plus ancienne des deux (1933) mais véritablement développée avec l'informatique, employée dans le cadre de variables quantitatives, homogènes ou pas.

- L'analyse **factorielle des correspondances** ou AFC (années 70), pour l'étude de tableaux de contingence (données qualitatives)

D'un point de vue méthodologique, le fonctionnement des deux méthodes, est le même, aussi on ne décrira ici que l'ACP.

ACP 1

- L’intérêt de l’ACP est de :

- Extraire le **maximum d’informations** sous une forme simple et cohérente à partir d’un ensemble très important de données (description synthétique)

- Permettre de mettre en évidence
  - Des **interrelations entre variables** (redondance)
  - Des **ressemblances ou oppositions** entre individus

- Les résultats se présentent sous forme de combinaisons linéaires de variables différenciant les individus statistiques

- L’ACP permet d’extraire le maximum d’information sous une forme simple et cohérente à partir d’un ensemble très important de données et sert à mettre en évidence les interrelations entre les variables et les ressemblances et oppositions entre les individus (profils).

ACP 2

- L'ACP s'applique uniquement sur des variables quantitatives qui peuvent être exprimées

- Soit dans une même unité (exemple : le % de cas de Covid 19 dans les passages aux urgences)
- Soit dans des unités différentes (exemple : la mort infantile, le revenu par habitant …)

Le tableau de données est constitué de n individus statistiques (unités spatiales, individus …) caractérisés par p variables quantitatives. Ce tableau de données D constitue une matrice d'informations (n,p)

  - Chaque ligne = vecteur ligne décrit un individu selon p variables
  - Chaque colonne = vecteur colonne décrit un indicateur selon n individus.

- Le but de l'ACP est de prendre l'information contenue dans ce tableau de dimension importante et la représenter sous forme simplifiée.

ACP 3 : axes factoriels

- L'ACP consiste à réduire la taille du nuage de points multi-dimensionnels en un nuage de points en 3-4 dimensions.

- Pour cela on fait une projection selon des axes (axes factoriels ou facteurs)
- Ces axes sont des combinaisons linéaires de variables

$F_i=A_1X_1+A_2X_2+\ldots..A_pX_p$ avec la plupart des $A_i=0$

- Les coefficients A_i permettent de mesurer l'intensité de la relation de chaque variable avec le facteur considéré (de max à nul selon les composantes), les coefficients A_i changent d'un facteur à l'autre.

- Les facteurs sont **hiérarchisés** : l'axe 1 compte le maximum d'informations : axe de plus grande dispersion du nuage de points mais il laisse de côté des résidus, c'est le $2^{ième}$ axe qui prend en compte le maximum d'informations résiduelles et ainsi de suite pour les axes suivants.

- Par construction, tous les axes (facteurs) sont non corrélés, ils forment donc des angles droits deux à deux.

ACP 4 : calcul des axes factoriels

- L'idée est de transformer la matrice d'information en une matrice de projection des individus statistiques sur les axes.

Quelques étapes :

- **Centrer – réduire les données**

L'idée de centrer – réduire les données permet de gommer les effets taille

Si les données sont assez homogènes, on pratique un simple centrage.

Si les données sont assez hétérogènes, le centrer-réduire est obligatoire (ramène la moyenne à 0 et l'écart-type à 1) ce qui donne une ACP normée.

- L'ACP normée consiste en :
    - **Variables centrées réduites**
    - **Projections orthogonales**
    - **Méthode des moindres carrés**

RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

UNIVERSITÉ CÔTE D'AZUR

ACP 5 : détermination des axes factoriels

- La matrice de données D (individus variables) est une matrice à n lignes et p colonnes. A cette matrice on associe une matrice D' (matrice transposée).

En faisant le produit de D'.D on obtient une matrice carrée, symétrique d'ordre p appelée matrice d'inertie, notée T

Toute l'ACP repose sur du calcul matriciel. Les axes sont définis par des vecteurs propres et valeurs propres que nous définissons maintenant

Un vecteur propre est un vecteur tel que T.V=μV où μ est une valeur propre

Pour bien faire comprendre la méthode de calculs, nous allons détaillé la méthode sur un espace à deux dimensions

RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
Liberté Égalité Fraternité

UNIVERSITÉ CÔTE D'AZUR

ACP 6 : exemple de calcul des axes factoriels

Soit la matrice symétrique T suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour trouver la valeur propre μ, on résout le système T.V=μV

$$T - \mu I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\mu & 2 \\ 2 & 1-\mu \end{pmatrix}$$

Det $(T - \mu I) = (1-\mu)^2 - 4 = (-1-\mu)(3-\mu) = 0$

La résolution de cette équation donne μ=-1 et μ=3

on résout alors les systèmes T.V=-V et T.V=3V

Détaillons la résolution du deuxième système

RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
UNIVERSITÉ CÔTE D'AZUR

ACP 7 : exemple de calcul des axes factoriels

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} * V = 3V$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} * \binom{V_1}{V_2} = 3\binom{V_1}{V_2}$$

La résolution de ce système donne : $V_1=V_2$. Comme les vecteurs sont normés, on obtient aisément

$V_1 = V_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ De même, l'autre équation amène à $V_3 = V_4 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

Remarquons que V_1 et V_3 sont bien orthogonaux (leur produit scalaire est nul : les axes sont donc bien décorrélés)

RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
Liberté Égalité Fraternité

UNIVERSITÉ CÔTE D'AZUR

ACP 8 : part d'explication des axes factoriels

La **part d'explication** d'un axe est donné par la formule suivante : $\mu_i\% = \frac{\mu_i}{\sum \mu_i}$*100

Dans l'exemple vu précédemment, l'axe 1 explique 75% de la variance.

Dans le cas à n dimensions, deux situations peuvent se produire

- Soit **l'histogramme des valeurs propres** est assez droit, le nuage de points est plutôt arrondi sans axe d'allongement véritablement marqué : on peut en déduire que les interrelations entre les variables sont sans doute faibles et qu'il ne se dégage pas de combinaisons simples de l'ensemble des données.

- Soit **l'histogramme des valeurs propres** est assez concentré, les valeurs propres sont très différenciées et on perçoit l'existence de deux axes d'allongement très marqués, on peut s'attendre alors à ce qu'il ressorte une structure de différenciation forte (profils marqués)

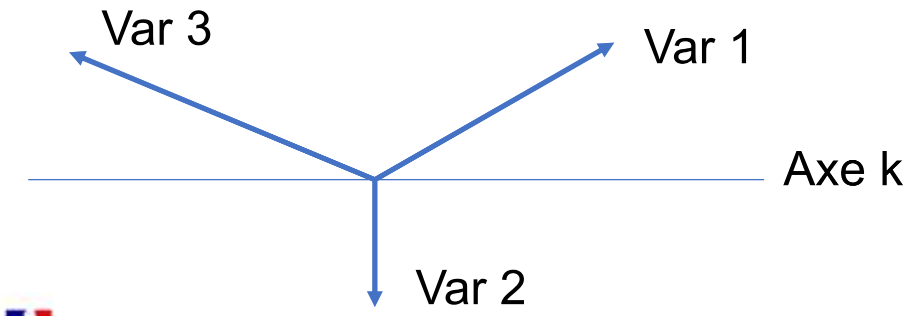
ACP 9 : interprétation d'une analyse factorielle

- **Coordonnées sur les axes factoriels** (position des individus par rapport aux axes factoriels, mise en évidence des oppositions entre groupe d'individus par rapport aux combinaisons de variables définies par les axes.

- **Qualité de représentation** des individus sur les axes factoriels : deux points distincts peuvent avoir la même projection sur l'axe factoriel mais l'un sera mieux représenté que l'autre (angle plus petit).

- **Contribution des individus** dans la formation de l'axe : les individus contribuent plus ou moins à déterminer la direction des différents axes d'allongement du nuage. Elle est mesurée par la part de l'individu dans la variance.

- **Part de l'individu dans l'inertie totale du nuage** = INR : elle est proportionnelle à sa distance au centre de gravité (G). Elle donne une idée de la spécificité de l'individu par rapport à la moyenne.



Var 1 et Var 3 sont bien corrélées à l'axe k (bonne saturation sur l'axe) tandis que Var 2 est orthogonale à l'axe k (saturation nulle)

Equations différentielles

- **Définitions** :

Toute équation différentielle (ED) est une équation reliant une fonction et ses **dérivées** d'ordre 1, 2, ….n.

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0$$

Les solutions d'une telle équation s'appellent le **flot**.

RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

UNIVERSITÉ CÔTE D'AZUR

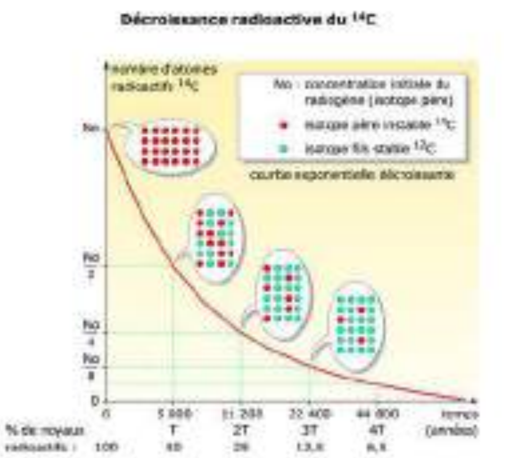
Utilité des équations différentielles

- Modéliser les oscillations d’un pendule, d’un ressort, d’une corde …

- Modéliser les circuits électriques

- Estimer un taux de radioactivité (demi-vie…)

- Dater au carbone 14



- Modéliser des systèmes complexes (comme par exemple le modèle proies – prédateurs)

Equations différentielles du premier ordre

Soit E un espace vectoriel normé complet sur R. On appelle équation différentielle du premier ordre une équation de la forme $y'=f(x,y)$, où f est une application continue sur un ouvert U de $R \times E$ à valeurs dans E.

On appelle solution de cette équation une application φ dérivable sur un intervalle I de R à valeurs dans E telle que, pour tout point x de I, $(x, \varphi(x))$ appartienne à U et que : $\varphi'(x)=f(x, \varphi(x))$

Equations différentielles du premier ordre sans second membre

Toute équation différentielle du premier ordre sans second membre s'écrit de la forme :

$Y'+aY=0$ (E) où a est un réel quelconque.

Remarquons que $Y=0$ est une solution dite évidente de (E). Cherchons maintenant les solutions non nulles.

En utilisant la méthode dite de séparation de variables on obtient aisément $Y=Ce^{-ax}$, avec C constante réelle.

Equations différentielles du premier ordre avec second membre réel

Toute équation différentielle du premier ordre avec second membre s’écrit de la forme :

$Y'+aY=b$ (E’) où a et b sont des réels quelconques.

La solution de cette équation (E’) est la somme de la solution de l’équation sans second membre et d’une solution particulière Y_0.

En prenant $Y_0=b/a$, toute solution (E’) s’écrit comme suit :

$$Y = Ce^{-ax} + \frac{b}{a}$$

Lorsque le second membre est une fonction, on procède par la **méthode de la variation de la constante** suivie d’une intégration (calcul intégral)

Théorème : (Equation différentielle $y' + a(x)y = b(x)$)
Soient $a, b \in \mathcal{C}(I, K)$, A une primitive de a sur I, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$.
Il existe une unique solution sur I de l'équation $y' + a(x)y = b(x)$ telle que $y(x_0) = y_0$; elle est définie par :

$$\forall x \in I, y(x) = y_0 e^{A(x_0)-A(x)} + \int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)-A(x)}dt.$$

Théorème : (Equation différentielle $y' + a(x)y = b(x)$, solutions générale et particulière)
Soient $a, b \in \mathcal{C}(I, K)$, A une primitive de a sur I, $\bar{y}$ une solution particulière de l'équation $y' + a(x)y = b(x)$ sur I. Soit de plus y une fonction dérivable sur I. Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) $y' + ay = b$ sur I.
(ii) Il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que, sur I, on ait

$$\underbrace{y}_{\text{solution générale de l'équation avec second membre}} = \underbrace{\bar{y}}_{\text{solution particulière}} + \underbrace{\lambda e^{-A}}_{\text{solution générale de l'équation homogène}}$$

En d'autres termes, si on connaît une solution particulière de l'équation $y' + a(x)y = b(x)$, alors on en connaît toutes les solutions.

Equations différentielles du second ordre à coefficients constants

Equation homogène :

Théorème : (Equation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$)
Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 0$. On appelle polynôme caractéristique de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$ le polynôme $aX^2 + bX + c$. Notons $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

- **Cas complexe** ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

1. Si $\underline{\Delta \neq 0}$, soient r_1 et r_2 les racines distinctes de $aX^2 + bX + c$. Les solutions complexes de $ay'' + by' + cy = 0$ sont alors toutes les fonctions $\boxed{x \mapsto \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$.
2. Si $\underline{\Delta = 0}$, soit r l'unique racine de $aX^2 + bX + c$. Les solutions complexes de $ay'' + by' + cy = 0$ sont alors toutes les fonctions $\boxed{x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{rx}}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

- **Cas réel** ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

1. Si $\underline{\Delta > 0}$, soient r_1 et r_2 les racines (réelles) distinctes de $aX^2 + bX + c$. Les solutions réelles de $ay'' + by' + cy = 0$ sont alors toutes les fonctions $\boxed{x \mapsto \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
2. Si $\underline{\Delta = 0}$, soit r l'unique racine de $aX^2 + bX + c$. Les solutions réelles de $ay'' + by' + cy = 0$ sont alors toutes les fonctions $\boxed{x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{rx}}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
3. Si $\underline{\Delta < 0}$, soient $r + i\omega$ et $r - i\omega$ les racines (complexes conjuguées) distinctes de $aX^2 + bX + c$. Les solutions réelles de $ay'' + by' + cy = 0$ sont alors toutes les fonctions $\boxed{x \mapsto (\lambda \sin(\omega x) + \mu \cos(\omega x))\, e^{rx}}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, que l'on peut aussi mettre sous la forme $x \mapsto \lambda \sin(\omega x + \phi)e^{rx}$ ou $x \mapsto \lambda \cos(\omega x + \phi)e^{rx}$, $\lambda, \phi \in \mathbb{R}$.

Si de plus une condition initiale de la forme $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$ est fixée, avec $x_0 \in I$ et $y_0, y_1 \in \mathbb{K}$, alors la valeur des constantes est fixée. L'équation avec condition initiale possède une unique solution.

Equation avec second membre :

Théorème : (Equation différentielle $ay'' + by' + cy = d(x)$)
Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$ (avec $a \neq 0$), $d \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$, $x_0 \in I$ et $y_0, y_1 \in \mathbb{K}$. Il existe une unique solution sur I de l'équation $ay'' + by' + cy = d(x)$ telle que $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$.

Théorème : (Equation différentielle $ay'' + by' + cy = d(x)$)
Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$ (avec $a \neq 0$), $d \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ et $\bar{y}$ une solution particulière de l'équation $ay'' + by' + cy = d(x)$ sur I. Soit de plus $y : I \to \mathbb{K}$ une application deux fois dérivable sur I. Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) $ay'' + by' + cy = d$ sur I.
(ii)

$$\underbrace{y}_{\text{solution générale de l'équation avec second membre}} = \underbrace{\bar{y}}_{\text{solution particulière}} + \underbrace{\tilde{y}}_{\text{solution générale de l'équation homogène}}$$

En d'autres termes, si on connaît une solution particulière de l'équation $y' + a(x)y = b(x)$, alors on en connaît toutes les solutions.

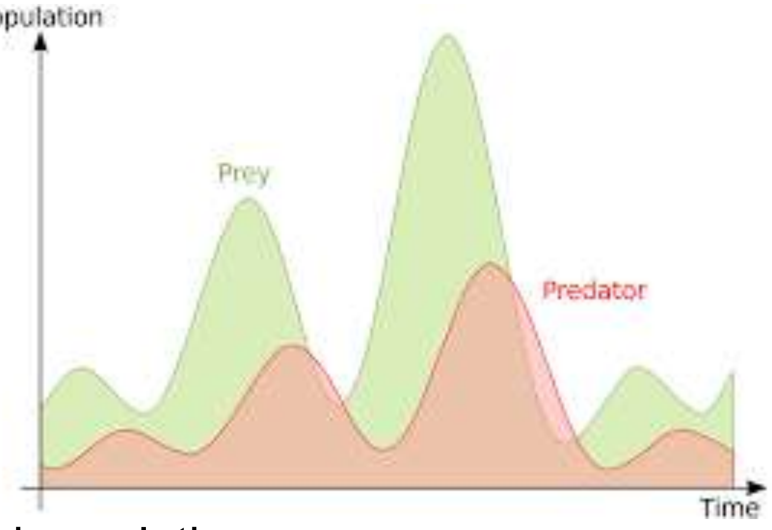
Equations différentielles : modèle de Lotka – Volterra

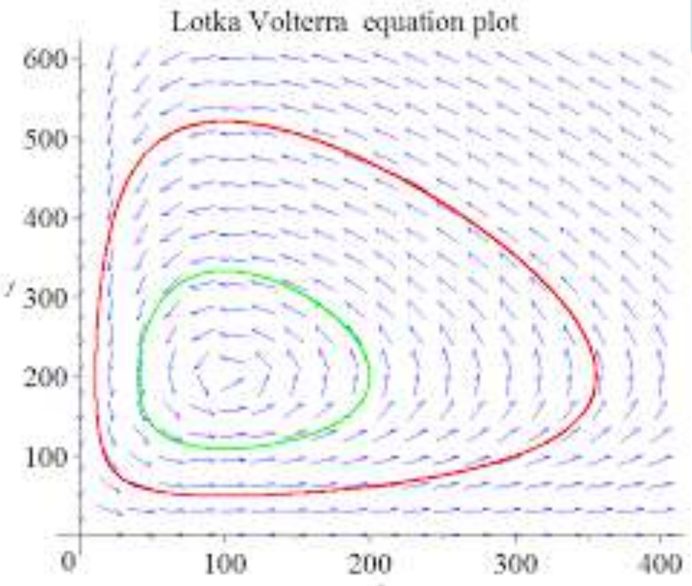
En mathématiques, les **équations de prédation de Lotka-Volterra**, que l'on désigne aussi sous le terme de « modèle proie-prédateur », sont un couple d'équations différentielles non-linéaires du premier ordre, et sont couramment utilisées pour décrire la dynamique de systèmes biologiques dans lesquels un prédateur et sa proie interagissent.

Dans ce système, t désigne le temps, x(t) l'effectif des proies, y(t) l'effectif des prédateurs, x'(t) et y'(t) les variations des populations au cours du temps, α le taux de reproduction des proies, β le taux de mortalité des proies, δ le taux de reproduction des prédateurs et γ le taux de mortalité des prédateurs.

Le système s'écrit sous la forme suivante

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)(\alpha - \beta y(t)) \\ y'(t) = y(t)(\delta x(t) - \gamma) \end{cases}$$





Pas de solutions analytiques, d'où dessin des solutions

Equations différentielles : modèle de Verhulst

Verhulst a proposé de modéliser la dynamique de population, le cycle de vie d'une innovation etc.

Ce problème se modélise par une équation différentielle de la forme : $\begin{cases} y(0) = y_0 \\ y' = ry(1 - \frac{y}{K}) \end{cases}$

Autrement dit l'évolution de la population est une fonction de la population et de la population au carré.

En faisant un changement de variable z=1/y, on obtient : $z' = rz\left(1 - \frac{1}{kz}\right)$

Soit : $z' = rz - \frac{r}{k}$ c'est-à-dire une équation du premier ordre avec second membre (cas vu auparavant).

Exercices :

Ex 1 : Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n. Quelle(s) proposition(s) parmi les suivantes est (sont) exactes ?

A) AB=BA
B) Les matrices commutent
C) B est l'inverse de A
D) Les produits AB et BA existent
E) Aucune de ces réponses n'est correcte

RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

UNIVERSITÉ CÔTE D'AZUR

Correction de l'exercice n°1

Réponse : D

En général, deux matrices carrées d'ordre n ne commutent pas. La seule chose qui est sûre est que les produits AB et BA existent.

Ex 2 : Soient A et B deux matrices rectangulaires. Quelle(s) proposition(s) parmi les suivantes est (sont) exactes ?

A) AB=BA
B) Les produits AB et BA existent
C) Pour que le produit AB existe, il faut que le nombre de lignes de A soit égal au nombre de colonnes de B
D) Pour que le produit AB existe, il faut que le nombre de lignes de B soit égal au nombre de colonnes de A
E) Aucune de ces réponses n'est correcte

Correction de l’exercice n°2

Réponse : D

En général, deux matrices ne commutent pas, le produit peut très bien ne pas exister. Ainsi, pour que le produit AB existe, il faut que le nombre de lignes de B soit égal au nombre de colonnes de A.

Ex 3 : Soient A et B deux matrices rectangulaires. Quelle(s) proposition(s) parmi les suivantes est (sont) exactes ?

A) Les deux matrices commutent

B) La transposée de A a la même dimension que A
C) Il est possible de calculer les puissances de A
D) $A^2=A$
E) Aucune de ces réponses n'est correcte

RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

UNIVERSITÉ CÔTE D'AZUR

Correction de l’exercice n°3

Réponse : E

En général, les matrices ne commutent pas. Si la transposée de A a la même dimension que A, c’est qu’elle est carrée et il est impossible de calculer les puissances de A.

Ex 4 : Soit A une matrice carrée d'ordre n, nilpotente d'ordre 3. Quelle(s) proposition(s) parmi les suivantes est (sont) exactes ?

A) ${}^{t}A$ existe
B) ${}^{t}A = A$
C) Pour tout $n \geq 3$, $A^3=0$
D) A est inversible
E) Aucune de ces réponses n'est correcte

RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
UNIVERSITÉ CÔTE D'AZUR

Correction de l’exercice n°4

Réponse : A et C

Soit A une matrice carrée d’ordre n, nilpotente d’ordre 3. La transposée d’une matrice existe toujours.
Pour tout $n \geq 3$, $A^3=0$, c’est la définition même d’une matrice nilpotente.

Ex 5 : Soit A une matrice carrée d'ordre n et inversible. Quelle(s) proposition(s) parmi les suivantes est (sont) exactes ?

A) $\det A = 0$
B) $\det A \neq 0$
C) $A^{-1} = A$
D) $A\,A^{-1} = I$
E) Aucune de ces réponses n'est correcte

Correction de l’exercice n°5

Réponse : B et D

Une matrice est inversible si son déterminant est différent de zéro et si $A. A^{-1}=I$

Ex 6 : Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n. Quelle(s) proposition(s) parmi les suivantes est (sont) exactes ?

A) $(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$
B) $(A+B)^2 = A^2+AB+BA+B^2$
C) $AB=BA$
D) $A=B^{-1}$
E) Aucune de ces réponses n'est correcte

Correction de l’exercice n°6

Réponse : B

$(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$ car en général, les matrices A et B ne commutent pas. Il n’y a aucune raison pour que la matrice A soit l’inverse de la matrice B.

Ex 7 : Soient A une matrice carrée d'ordre n et B une matrice colonne. Quelle(s) proposition(s) parmi les suivantes est (sont) exactes ?

A) Le produit de A et B est toujours possible
B) AB=BA
C) Le produit de A et B existe seulement si B possède n lignes
D) A est inversible
E) Aucune de ces réponses n'est correcte

Correction de l’exercice n°7

Réponse : C

Le produit de A et B peut ne pas exister. En général les matrices A et B ne commutent pas. Le produit de A et B existe seulement si B possède n lignes (le nombre de lignes de B doit être égal au nombre de colonnes de A).

Ex 8 : Soient A une matrice ligne et B une matrice colonne. Quelle(s) proposition(s) parmi les suivantes est (sont) exactes ?

A) Le produit de A et B existe
B) AB=BA
C) Si le produit AB existe alors c'est un nombre
D) Le produit existe seulement si le nombre de colonnes de A est égale au nombre de lignes de B
E) Les réponses A, B, C et D sont fausses

Correction de l’exercice n°8

Réponse : C et D

Le produit existe seulement si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B et donne un nombre.

Ex 9 : Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n. Quelle(s) proposition(s) parmi les suivantes est (sont) exactes ?

A) Le produit de A et B existe toujours
B) Si AB = 0 alors A ou B = 0
C) Un produit de matrices est nul si et seulement si l'une des matrices est nulle
D) Pour toute matrice carrée, il est possible de calculer ses puissances successives
E) Les réponses A, B, C et D sont fausses

Correction de l’exercice n°9

Réponse : A et D

Le produit de deux matrice carrées d’ordre n existe toujours mais on peut très bien avoir un produit de matrices nul sans que les matrices soient nulles, il suffit pour cela de prendre deux matrices extrêmement creuses (autrement dit avec beaucoup de 0).

Ex 10 : Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n. Quelle(s) proposition(s) parmi les suivantes est (sont) exactes ?

A) Si $AB=I_n$ alors $BA=I_n$
B) Si $AB=I_n$ alors B est l'inverse de A
C) L'inverse de AB est $B^{-1}A^{-1}$
D) L'inverse de AB est $A^{-1} B^{-1}$
E) Les réponses A, B, C et D sont fausses

Correction de l’exercice n°10

Réponse : B et C

Deux matrices ne commutent pas forcément : ce n’est pas parce que $AB=I_n$ que $BA=I_n$
Si $AB=I_n$, alors B est l’inverse de A. L’inverse de AB est $B^{-1}A^{-1}$. En effet : $AB*B^{-1}A^{-1}=AA^{-1}=I_n$

Ex 11 : Soit A une matrice carrée d'ordre 2. Quelle(s) proposition(s) parmi les suivantes est (sont) exactes ?

A) Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors son inverse existe

B) Si $ad - bc \neq 0$ alors $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

C) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ alors $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

D) A et A^{-1} commutent toujours

E) Les réponses A, B, C et D sont fausses

Correction de l’exercice n°11

Réponse : B et D

L’inverse d’une matrice n’existe pas toujours, quand c’est le cas, il est donné par la réponse B.
La réponse C est fausse car à cause de la deuxième ligne de la matrice, on a permuté les signes.
Pour toute matrice carré, si A^{-1} existe, alors A et A^{-1} commutent toujours (réponse D).

Ex 12 : Soit A la matrice carrée d'ordre 2 suivante : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Quelle(s) proposition(s) parmi les suivantes est (sont) exactes ?

A) $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}$

B) $A^2 - 2A + I = 2A$

C) $A^2 - 4A + I = 0$

D) A est inversible et $A^{-1} = 4I - A$

E) Les réponses A, B, C et D sont fausses

Correction de l’exercice n°12

Réponse : B, C et D

Le calcul du carré de A donne :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \; et \; A^2 - 2A + I = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Soit 2A (Réponse B).

A^2-4A+I=0 donc A(A-4I)=-I donc A^{-1}=4I-A (Réponses C et D)

Ex 13 : Soit B la matrice carrée d'ordre 3 suivante : $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Quelle(s) proposition(s) parmi les suivantes est (sont) exactes ?

A) B est nimpotente d'ordre 3
B) B est inversible
C) Quel que soit n supérieur ou égal à 3, $B^n = 0$
D) $B^5 = I$
E) Les réponses A, B, C et D sont fausses

Correction de l'exercice n°13

Réponse : C

On calcule les puissances successives de la matrice B. on trouve :

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc, B est nilpotente d'ordre 2. B n'est pas inversible car $B*B^2=0$

RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

UNIVERSITÉ CÔTE D'AZUR

Ex 14 : Soit A la matrice carrée d'ordre 3 suivante : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Quelle(s) proposition(s) parmi les suivantes est (sont) exactes ?

A) A est inversible et toute puissance de A aussi
B) A est diagonale et toute puissance de A aussi
C) L'inverse de A^n est $\begin{pmatrix} 1/2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1/4^n & 0 \\ 0 & 0 & 1/3^n \end{pmatrix}$
D) $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$
E) Les réponses A, B, C et D sont fausses

RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

UNIVERSITÉ CÔTE D'AZUR

Correction de l'exercice n°14

Réponse : A, B et D

A est une matrice diagonale, elle est inversible et les éléments diagonaux de l'inverse sont les inverses des éléments de la matrice A, tout comme pour l'inverse de la matrice A^n. Toute puissance de A est diagonale. De plus A (également son inverse) commute avec n'importe quelle de ses puissances.

Ex 15 : Soit A la matrice carrée d'ordre 3 suivante : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Quelle(s) proposition(s) parmi les suivantes est (sont) exactes ?

A) $A^2 = I$
B) A n'est pas inversible
C) Si A est inversible alors $A = A^{-1}$
D) A est dite « matrice creuse »
E) Les réponses A, B, C et D sont fausses

Correction de l’exercice n°15

Réponse : A, C et D

Le calcul du carré de A donne la matrice identité d’ordre 3 (Réponse A). Comme $A^2=I$, A est inversible et $A=A^{-1}$, A est dite creuse car elle contient presque tous les coefficients nuls.

Ex 16 : Soient A et B deux matrices carrées d'ordre 3 suivantes : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -2/3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 8 & 20/3 & 2 \end{pmatrix}$, on désigne par P la matrice de passage de A à B. Quelle(s) proposition(s) parmi les suivantes est (sont) exactes ?

A) La matrice P a tous ses coefficients positifs
B) La matrice P a tous ses coefficients pairs
C) La matrice P est donnée par la formule AP=BA
D) La matrice P est donnée par la formule $PA^{-1} = A^{-1}B$
E) Les réponses A, B, C et D sont fausses

Correction de l’exercice n°16

Réponse : C et D

On note P la matrice de passage telle que APA-1=B (Réponse D). En multipliant à droite par A, on obtient la réponse C. On peut ainsi calculer P. Le résultat donne :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Tous les coefficients sont positifs sauf un et, 5 est impair.

RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
Liberté
Égalité
Fraternité

UNIVERSITÉ CÔTE D’AZUR

Ex 17 : Soit A la matrice carrée d'ordre 2 suivante $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Quelle(s) proposition(s) parmi les suivantes est (sont) exactes ?

A) Les matrices $A\,{}^tA$ et ${}^tAA$ sont symétriques
B) Si $A\,{}^tA = {}^tAA$ alors les matrices de A et de sa transposée sont identiques
C) Si A est inversible alors ${}^tA$ est également inversible
D) ${}^tA$ est toujours inversible
E) Les réponses A, B, C et D sont fausses

Correction de l'exercice n°17

Réponse : A, B et C

On calcule les matrices $A{}^tA$ et ${}^tAA$, on obtient les valeurs suivantes :

$$A\ {}^tA = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} et\ \ {}^tAA = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix}$$

Les deux matrices calculées sont symétriques (réponse A). Si $A{}^tA={}^tAA$ alors b=c et dans ce cas, A et sa transposée sont identiques (Réponse B). La transposée d'une matrice inversible est toujours inversible (Réponse C).

Ex 18 : Soient A et B les matrices suivantes $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Quelle(s) proposition(s) parmi les suivantes est (sont) exactes ?

A) Le produit AB vaut la matrice unité
B) AB=I donc A est inversible
C) BA=AB
D) BA≠I
E) Les réponses A, B, C et D sont fausses

RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
UNIVERSITÉ CÔTE D'AZUR

Correction de l’exercice n°18

Réponse : A et D

Le calcul de la matrice AB donne la matrice unité d’ordre 2 (Réponse A). A ne peut pas être inversible car elle n’est pas carrée. La matrice BA est une matrice carrée d’ordre 3, donc différente de AB. Le calcul de BA donne la matrice suivante :

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Qui est différente de la matrice unité (Réponse D).

Ex 19 : Soient A et B les matrices suivantes $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\\ -1 & 4\end{pmatrix}$. Quelle(s) proposition(s) parmi les suivantes est (sont) exactes ?

A) Les produits AB et BA sont inversibles
B) AB et BA ont la même dimension
C) Comme AB est inversible les matrices A et B sont également inversibles
D) BA=AB
E) Les réponses A, B, C et D sont fausses

Correction de l’exercice n°19

Réponse : E

Le calcul des matrices AB et BA donne :

$$AB = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ -2 & 12 \end{pmatrix} \, et \; BA = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 7 \\ 3 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

AB a un déterminant différent de zéro, donc elle est inversible, det BA =0. A et B ne sont pas inversibles car ces matrices ne sont pas des matrices carrées.

Ex 20 : Soient A et B les matrices suivantes $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Quelle(s) proposition(s) parmi les suivantes est (sont) exactes ?

A) La matrice A est symétrique
B) La matrice B est symétrique
C) La matrice B est antisymétrique
D) Pour toute matrice antisymétrique, on a ${}^{t}A + A = 0$
E) Les réponses A, B, C et D sont fausses

Correction de l’exercice n°20

Réponse : C et D

Les matrices A et B ne sont pas symétriques car $a_{12} \neq a_{21}$ et $b_{12} \neq b_{21}$. La matrice B est antisymétrique car ${}^{t}B=-B$ (réponse C). La réponse D est vraie car c’est une autre écriture de la définition d’une matrice antisymétrique.

Ex 21 : Soient A et B, deux matrices carrées d'ordre n. Quelle(s) proposition(s) parmi les suivantes est (sont) exactes ?

A) Pour toute matrice antisymétrique, on a ${}^tA + A = 0$
B) Pour toute matrice symétrique, on a ${}^tA - A = 0$
C) Toute matrice symétrique est inversible
D) Toute matrice antisymétrique est inversible
E) Les réponses A, B, C et D sont fausses

Correction de l’exercice n°21

Réponse : A et B

Une matrice est dite symétrique si sa transposée est égale à elle-même, antisymétrique si sa transposée est égale à son opposée (Réponses A et B). La réponse C est fausse, il suffit pour cela de prendre par exemple la matrice carrée d’ordre 2 contenant 4 fois la valeur 1 dont le déterminant vaut 0 donc non inversible.

Ex 22 : Soit A une matrice à deux lignes et trois colonnes. Quelle(s) proposition(s) parmi les suivantes est (sont) exactes ?

A) Le produit ${}^tAA$ existe et a pour dimension 3*3
B) Le produit ${}^tAA$ est une matrice symétrique
C) Les matrices ${}^tAA$ et $A{}^tA$ ont mêmes dimensions
D) Les matrices ${}^tAA$ et $A{}^tA$ sont symétriques
E) Les réponses A, B, C et D sont fausses

Correction de l’exercice n°22

Réponse : A, B et D

Si A possède deux lignes et trois colonnes alors tA possède trois lignes et deux colonnes, par suite ${}^{t}AA$ existe et a pour dimension 3*3 et est symétrique (réponses A, B et D). $A^{t}A$ a pour dimension 2*2 donc la réponse C est fausse.

RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

UNIVERSITÉ CÔTE D’AZUR

Ex 23 : Soient A et B deux matrices carrées d'ordre 3 suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et

$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Quelle(s) proposition(s) parmi les suivantes est (sont) exactes ?

A) A^2 existe et vaut $2I + B$
B) A^3 existe et vaut $2A - B$
C) Le produit ${}^tAA$ est une matrice symétrique et vaut A^2
D) A est une matrice inversible
E) Les réponses A, B, C et D sont fausses

Correction de l’exercice n°23

Réponse : B, C et D

Le calcul du carré et du cube de A donne $A^2=2I-B$, $A^3=2A-B$. La transposée de la matrice A est égale à elle – même. Ainsi, ${}^tAA$ est une matrice symétrique et vaut A^2.
A est inversible car son déterminant vaut : -2.

RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
Liberté
Égalité
Fraternité
UNIVERSITÉ CÔTE D’AZUR

Exercices :

Ex 1 : L'équation différentielle y'+3y=0 a pour solution. Quelle(s) proposition(s) parmi les suivantes est (sont) exactes ?

A) La solution est $y= e^{-3x}$
B) Une solution est $y= e^{-3x}$
C) Toute solution s'écrit Ce^{-3x} où C désigne une constante quelconque
D) Cette équation différentielle est de degré 2
E) Les réponses A, B, C et D sont fausses

Correction de l'exercice n°1

Réponse : B et C

Une solution est $y = e^{-3x}$
Mais toute solution s'écrit :
Ce^{-3x} où C désigne une constante quelconque (Réponses B et C). Cette équation différentielle est de degré 1 (dérivée première).

Ex 2 : Soit (E) une équation différentielle linéaire du premier ordre. Quelle(s) proposition(s) parmi les suivantes est (sont) exactes ?

A) Si y est une solution alors tout multiple aussi
B) Si y_1 et y_2 sont solutions de (E) alors toute combinaison linéaire est également solution
C) Toute solution s'écrit de la forme Ae^{-Bx}
D) Cette équation peut ne pas avoir de solution
E) Les propositions A, B, C et D sont fausses

Correction de l’exercice n°2

Réponse : A, B et C

(E) est une équation différentielle linéaire du premier ordre, ce qui signifie que les réponses A, B et C sont correctes. Dans tous les cas, l’équation a une solution (même celle nulle)

Ex 3 : Soit (E) une équation différentielle linéaire du premier ordre. Quelle(s) proposition(s) parmi les suivantes est (sont) exactes ?

A) Toute solution s'écrit de la forme Ae^{-Bx}
B) Il existe une infinité de solutions
C) Il existe une unique solution passant par le point de coordonnées (3,0)
D) L'équation peut ne pas avoir de solutions
E) Les propositions A, B, C et D sont fausses

Correction de l'exercice n°3

Réponse : A, B et C

Toute équation différentielle linéaire du premier ordre a une solution qui s'écrit sous la forme Ae^{-Bx}, ce qui signifie qu'il existe également une infinité de solutions (une infinité de constantes A). Si on souhaite que la solution passe par le point de coordonnées (3,0), cela implique que l'on fixe les valeurs des constantes A et B, et la solution devient alors unique.

Ex 4 : Soit (E) une équation différentielle quelconque. Quelle(s) proposition(s) parmi les suivantes est (sont) exactes ?

A) Toute solution s'écrit de la forme Ae^{-Bx} avec A et B deux constantes
B) L'ensemble solution de l'équation (E) s'appelle un flot
C) Il existe nécessairement une infinité de solutions
D) L'équation peut ne pas avoir de solutions
E) Les propositions A, B, C et D sont fausses

Correction de l’exercice n°4

Réponse : B et D

Soit (E) une équation différentielle quelconque, la solution n’a pas forcément d’écriture analytique simple. L’ensemble des solutions d’une équation différentielle s’appelle un flot. L’équation différentielle n’a pas forcément de solutions (Réponses B et D).

Ex 5 : On considère le système d'équations différentielles dit de Lotka –Volterra suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)\left[\alpha - \beta y(t)\right] \\ y'(t) = -y(t)\left[\gamma - \delta x(t)\right] \end{cases}$$

Quelle(s) proposition(s) parmi les suivantes est (sont) exactes ?

A) Dans ce système d'équations différentielles, t désigne le temps
B) Ce modèle est plus communément appelé modèle « proies – prédateurs »
C) Les solutions de ce système peuvent s'écrire sous la forme de fonctions analytiques simples
D) Les solutions de ce système sont périodiques, ce qui signifie que les deux fonctions x(t) et y(t) passent par des mêmes valeurs à intervalles de temps réguliers
E) Les propositions A, B, C et D sont fausses

Correction de l’exercice n°5

Réponse : A, B et D

Traditionnellement dans les équations différentielles, t désigne le temps. Les équations différentielles dites de Lotka-Volterra sont aussi appelées modèle « proies-prédateurs ». Les solutions sont périodiques mais ne peuvent pas s’écrire sous forme analytique simple c’est pourquoi on dessine les cycles de phases par ordinateur.

Ex 6 : On s'intéresse à l'équation différentielle gouvernant la décroissance radioactive de noyaux. Cette équation à la forme suivante : $N'(t) = -\lambda N(t)$. Quelle(s) proposition(s) parmi les suivantes est (sont) exactes ?

A) Cette équation différentielle est du deuxième ordre
B) Cette équation différentielle admet une solution analytique simple
C) La solution de cette équation est de la forme $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ avec N_0 le nombre de noyaux radioactifs avant désintégration
D) λ désigne une constante radioactive qui dépend du type de noyau et n'a pas d'unité
E) Les propositions A, B, C et D sont fausses

Correction de l'exercice n°6

Réponse : B et C

L'équation différentielle proposée est du premier ordre, elle admet une solution analytique simple qui s'écrit sous la forme $N(t)=N_0e^{-\lambda t}$ avec N_0 le nombre de noyaux radioactifs avant désintégration (état initial), λ désigne la vitesse de décroissance.

Ex 7 : On reprend l'équation de l'exercice n°6. Quelle(s) proposition(s) parmi les suivantes est (sont) exactes ?

A) On considère la période de demi-vie, celle-ci est donnée par $T = \ln(2)/\lambda$ appelée constante du temps
B) Pour 2 constantes du temps, 80% des noyaux sont désintégrés
C) λ désigne une constante radioactive qui s'exprime comme l'inverse d'un temps
D) Pour 7 constantes du temps, 99% des noyaux sont désintégrés
E) Les propositions A, B, C et D sont fausses

Correction de l’exercice n°7

Réponse : A, C et D

On cherche la période de demi-vie, c’est-à-dire T tel que $N(T)=N_0/2$, ce qui donne $T=\ln(2)/\lambda$ (Réponse A). Pour deux constantes de temps, on obtient une désintégration de 75%. λ s’exprime comme du 1/T donc comme l’inverse d’une temps (réponse C). Pour 7 constantes de temps, 99% des noyaux sont désintégrés, il suffit de calculer $1-e^{-7\ln(2)=}0{,}99212875$.

Ex 8 : On souhaite résoudre l'équation différentielle du premier ordre suivant : $y' - y = (x+1)e^x$ notée (E). Quelle(s) proposition(s) parmi les suivantes est (sont) exactes ?

A) La solution de cette équation différentielle s'exprime comme la somme d'une solution de l'équation dite homogène et d'une solution particulière de (E)
B) Pour trouver la solution particulière, on peut utiliser la méthode de la variation de la constante
C) Une solution de l'équation homogène est Ce^{2x}
D) La solution de cette équation est $y(x) = (\frac{x^2}{2} + x)e^x$
E) Les propositions A, B, C et D sont fausses

Correction de l'exercice n°8

Réponse : A et B

Les réponses A et B sont des questions de cours, et définissent le principe de résolution des équations différentielles. La solution de cette équation différentielle est $y(x) = \left(\frac{x^2}{2} + x + k\right) e^x$
Avec k constante, la réponse D serait juste si on mettait « une » à la place de « la » en début de phrase.

Ex 9 : Soit l'équation différentielle linéaire du second ordre $y''+ay'+by=0$ où a et b désignent deux constantes. Quelle(s) proposition(s) parmi les suivantes est (sont) exactes ?

A) Si $a^2>4b$, alors toute solution de l'équation s'écrit sous la forme $f(x)=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$ où λ_1 et λ_2 sont solutions de l'équation du second degré : $r^2+ar+b=0$ et C_1 et C_2, deux constantes
B) La forme des solutions est indépendante des constantes a et b
C) Suivant les valeurs de a et b, les solutions de l'équation différentielle peuvent prendre trois formes génériques différentes
D) Lorsque $a^2=4b$, les solutions s'expriment à l'aide des fonctions trigonométriques sin et cos
E) Les propositions A, B, C et D sont fausses

Correction de l'exercice n°9

Réponse : A et C

La réponse A est une question de cours, pour résoudre une telle équation on pose le discriminant Δ= a^2-4b qui configure 3 cas, ce qui signifie que la forme des solutions dépend de la valeur (nulle, positive, ou négative) de Δ. Lorsque a^2 =4b , les solutions s'expriment à l'aide d'un polynôme et d'une exponentielle (Réponses A et C).

Ex 10 : On considère l'équation différentielle du premier ordre : $W'(x) = -\dfrac{b(x)}{a(x)}W(x)$ où a(x) et b(x) sont deux fonctions quelconques données et on s'intéresse à ses solutions. Quelle(s) proposition(s) parmi les suivantes est (sont) exactes ?

A) La solution de cette équation différentielle s'écrit $W(x) = W_0 e^{A(x)}$ où A(x) désigne une primitive de $-\dfrac{b(x)}{a(x)}$
B) Une solution analytique de cette équation différentielle est toujours possible
C) La primitive du quotient n'est pas toujours exprimable sous forme analytique simple
D) Si b(x) et a(x) sont des constantes, alors l'équation a toujours une solution analytique simple
E) Les propositions A, B, C et D sont fausses

Correction de l'exercice n°10

Réponse : A, C et D

Une simple intégration par séparation de variables permet de montrer que la solution de cette équation différentielle s'écrit $W(x)=W_0e^{A(x)}$, où A(x) désigne une primitive de $\frac{-b(x)}{a(x)}$ (Réponse A). Par contre, une primitive de $\frac{-b(x)}{a(x)}$ n'a pas forcément de forme analytique (Réponse C et D).

Ex 11 : Soit l'équation logistique de la croissance d'une population (modèle de Verhulst) où x désigne l'effectif de la population, r le taux de croissance et k la capacité porteuse du milieu. L'équation du modèle s'écrie $\frac{dx}{dt} = rx(1-\frac{x}{k})$. Quelle(s) proposition(s) parmi les suivantes est (sont) exactes ?

A) Une solution analytique de cette équation différentielle est toujours possible

B) La solution de cette équation différentielle peut s'écrire $x(t) = \frac{kx_0 e^{rt}}{k + x_0(e^{rt} - 1)}$

C) Ce modèle montre que lorsque t devient très grand, il y a saturation

D) Si r $\geq$0 alors il y a décroissance de population

E) Les propositions A, B, C et D sont fausses

RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

UNIVERSITÉ CÔTE D'AZUR

Correction de l’exercice n°11

Réponse : A, B et C

Le modèle de Verhulst ou équation logistique de la croissance d’une population, possède une expression analytique donnée en B (il suffit de dériver une solution proposée en B pour retomber sur l’équation du modèle).

Lorsque t devient grand, l’exponentielle l’emporte sur les autres termes et obtient une saturation à k (Réponse C). Si r ≥0 alors il y a croissance de population.