VARIABLE ALEATOIRE ET LOI DE PROBABILITE DISCRETE ET CONTINUE

I. DEFINITIONS

Dans ce cours on décrira des opérations précises (= épreuve) menant à un résultat aléatoire (=un évènement élémentaire).

On parle de variable **<u>aléatoire quand le résultat est un nombre</u>**. Une variable aléatoire est donc une épreuve menant à des évènements élémentaires qui sont des nombres.

Ex : lancer un dé est une variable aléatoire (résultat de 1 à 6), mais pas tirer une carte de jeu car les évènements ne sont ici pas des nombres.

On distingue les variables aléatoires discrètes et continues :

- Discrète si le résultat fait partie d'un ensemble fini ou dénombrable. *Ex : le nombre de pages de tes ronéos de chimie.*

- Continue si le résultat est compris dans $\mathbb{R}$ ou un intervalle de $\mathbb{R}$. On l'appelle aussi variable àdensité. *Ex : dosage de la glycémie*.

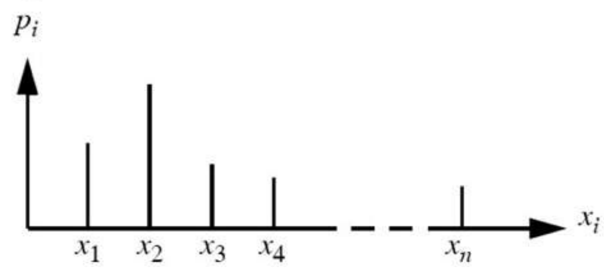
II. VARIABLES ALEATOIRES DISCRETES

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X discrète est définie en donnant l'ensemble des valeurs $p_1, p_2, \cdots, p_n$ qui sont les probabilités de ses différentes éventualités $x_1, x_2 \ldots, x_n$.
Soit $p_i = P(X = x_i)$ donc $0 \leq p_i \leq 1$ et $\sum p_i = 1$

On peut représenter cette loi par une table :

x_1	x_2	$\ldots$	x_n	$\ldots$
p_1	p_2	$\ldots$	p_n	$\ldots$

Ou par un diagramme en bâtons :



Les différents paramètres :

• MOYENNE : la moyenne μ de la variable aléatoire X est la valeur moyenne des résultats que l'on obtiendrait en répétant indéfiniment l'épreuve. C'est un indicateur de **position**.

$$\mu = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n = \sum_{i=1}^{i=n} x_ip_i$$

La moyenne de $x^2 \neq \mu^2$

• ESPERANCE : notée E(X), c'est un synonyme de la moyenne en probabilités et statistiques.

Théorèmes de l'espérance :
- Soit X une variable aléatoire et k une constante réelle :
- Soit X et Y deux variables aléatoires : E(X+Y) = E(X) + E(Y)

On peut généraliser cette dernière formule en disant que « l'Espérance de la somme est la somme des
Espérances ».

$$\begin{cases} E(kX) = k\,E(X) \\ E(k + X) = E(X) + k \end{cases}$$

• VARIANCE et ECART-TYPE : Notée σ^2, la variance est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne. L'écart-type est sa racine carrée, σ. Ce sont des paramètres de **dispersion**.

Soit a une constante on a : Var(X+a) = Var(X) et Var(aX) = a^2Var(X)

$$\sigma^2 = Var(X) = \sum_{i=1}^{i=n} p_i(x_i - \mu)^2$$

$$\sigma^2 = Var(X) = E(X-\mu)^2 = E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2) - \mu^2$$

Remarque :Donc la variance de valeur donné en C° et en K sont les mêmes si elles correspondent aux mêmes températures

• VARIABLE CENTREE REDUITE :

Soustraire sa moyenne à X permet de la « centrer ». La diviser par son écart-type permet d'avoir une variable « réduite ».

On défnit la variable centré réduite comme :

$$Y=\frac{X-\mu}{\sigma}$$

On a alors E(Y) = 0 et Var (Y) = 1

• FONCTION DE REPARTITION :
On la définit comme F(x) = P(X≤x).
C'est une **<u>fonction cumulative car on additionne toutes les probabilités (pi) des xi survenus avant x</u>**. C'est une fonction toujours monotone croissante.

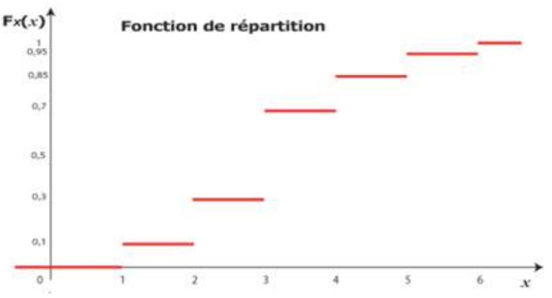
Si X est une variable aléatoire discrète :

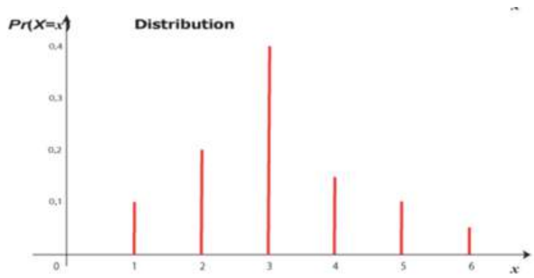
$$F(x) = \sum_{xi\leq x} P(X = xi) = \sum_{xi \leq x} p\,i$$

Ex : la probabilité d'obtenir un chiffre inférieur ou égal à 2 au cours d'un lancer de dé est égal à la probabilité de tirer un 1 + la probabilité de tirer un 2.

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$$

Remarque : La fonction de répartition est à bien distinguer de la fonction de distribution





La fonction de répartition est une fonction en escalier pour les variables aléatoires discrètes. Les discontinuités de x se produisent pour les valeurs de x ayant des probabilités non nulles. La hauteur de la discontinuité est la probabilité de X=x.
Ex : Obtenir 2 = Distribution
Obtenir une valeur inferieur à 2 = Repartition

III. LOIS DE PROBABILITE DISCRETES

A. Loi de BERNOULLI B(p)

L'Epreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire dont **<u>l'issue est un « succès » ou un « échec ».</u>**
Paramètres : p : probabilité d'un succès
q = 1-p : probabilité de l'échec

$$P(X=k) = p^k(1-p)^{1-k} = p^k q^{1-k} \qquad \text{pour} \qquad k \in \{0,1\}$$

X est la variable aléatoire donnant le nombre de « succès » pendant l'épreuve (0 ou 1).

Pour la loi de Bernoulli, on a alors **: μ=p et σ² = p(1-p) = pq**

Exemple : On a une boite avec 2 boules rouges et 6 noires. Soit l'événement « tirer une boule noire »
le succès avec une probabilité p = 6 /8 = 3/4
Si on tire une boule dans la boite au hasard on suit la loi de Bernoulli et on a :

$$P(X=0) = \frac{3^0}{4}\frac{1^1}{4} = \frac{1}{4} \; et \; P(X=1) = \frac{3^1}{4}\frac{1^0}{4} = \frac{3}{4}$$

B. Loi BINOMIALE B(n,p)

La loi Binomiale consiste en la répétition de **<u>n épreuves de Bernoulli indépendantes</u>**.
Paramètres : n : nombre d'essais indépendants
p : probabilité d'un succès
q = 1-p : probabilité d'un échec
X : variable aléatoire donnant le nombre de « succès » à l'issue de n essais (de 0 à n).

$$P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k} \qquad \text{pour} \qquad 0 \leq k \leq n$$

Rappel : $C_n{}^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

Avec : **μ=np et σ² = np(1-p) = npq**

Exemple : On reprend une boite avec cette fois 4 boules rouges et 6 noires. Soit l'événement « tirer une
boule noire » le succès. On tire trois fois une boule dans cette boite et chaque tirage est indépendant
des autres. On cherche la probabilité de tirer une boule noire soit P(X=1).

On a $p = \frac{6}{10}$ et n = 3.

$$P(X = 1) = C^1_3 \times \left(\frac{6}{10}\right)^1 \times \left(\frac{4}{10}\right)^2 = \frac{3!}{2!1!} \times 0{,}6 \times 0{,}16 = 3 \times 0{,}096 = 0{,}288$$

Propriétés et Particularités :

• Si p=0,50 la forme du diagramme de probabilités d'une distribution normale est symétrique
Si p>0,50 on parle d'asymétrie positive.
Si p<0,50 on parle d'asymétrie négative.
• Quand n est grand la forme devient symétrique. Quand n est grand et si p n'est pas trop proche de 0 ni de 1 alors la loi binomiale tend vers la loi normale.
• La loi Binomiale repose sur le principe du tirage **non exhaustif** (indépendant des autres tirages), cad que les éléments sélectionnés sont remis dans l'échantillon donc p ne varie donc pas.
Mais il existe aussi le tirage **exhaustif** (dépendant des autres tirages) : sans remise donc p varie au fil des tirages.
On définit donc le taux de sondage $\frac{n}{N}$ avec n la taille de l'échantillon et N la taille de la population.

Si $n/\mathrm{N} \leq 0{,}1$ on applique la loi binomiale(même si le tirage est exhaustif)

Si n /N >0,1 on appliquel loi hypegéométrique

.

C. Loi HYPERGEOMETRIQUE H(N,D,n)

Soit une population de N individus parmi lesquels D ont un **caractère donné**. On prélève un échantillon n de cette population N. Les individus de l'échantillon sont tirés simultanément (l'ordre de tirage n'a pas de sens) et sans remise. On l'utilise dans la reception de plans d'échantillonage pour le contrôle de reception.

Paramètres : N : effectif de la population
D : nb de personnes présentant le caractère étudié dans la population
D/N : probabilité p d'avoir le caractère étudié

$$P(X = k) = \frac{C_D^k \times C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n} \qquad \text{avec} \qquad min(0; n - D) \leq k \leq max(n; D)$$

On a donc $\boldsymbol{\mu} = \frac{\mathbf{nD}}{N} = \mathbf{np}$ et $\boldsymbol{\sigma^2} = \frac{nD}{N} \times \frac{N-D}{N} \times \frac{N-n}{N-1} = \boldsymbol{npq} \times \frac{\mathbf{N-n}}{\mathbf{N-1}}$

Exemple : Dans une usine, il y a 1000 machines dont 200 ont des défauts. On tire au sort 300 machines dans cette population. Quelle est la probabilité que la moitié de cet échantillon ait des défauts ?

$$P(X = 150) = \frac{C_{200}^{150} \times C_{800}^{150}}{C_{1000}^{300}}$$

La loi Hypergéométrique et la loi Binomiale sont proches, et ont la même Espérance.

Leur variance n'est cependant pas tout à fait identique puisqu'il existe le facteur $\frac{N-n}{N-1}$ en plus pour l'hypergéométrique.

Cependant, quand le taux de sondage est faible et donc n petit et N grand, ce facteur se rapproche de1 et la variance se rapproche donc de celle de la Binomiale.

On comprend donc mieux les conditions d'approximation.

D. Loi GEOMETRIQUE G(p)

On répète des épreuves de Bernoulli **<u>jusqu'à l'obtention d'un succès</u>**.
Onl'utilise pour étudier l'efficacité d'une carte de contrôle dans un dispositif de surveillance d'un processus de production.
Paramètres

- X : variable aléatoire « nb d'essais nécessaires » à l'obtention du 1er succès
- p : probabilité d'un succès
- q : probabilité d'un échec

$$P(X = k) = p(1-p)^{k-1} = pq^{k-1} \qquad \text{pour} \qquad k \in \mathbb{N}^*$$

On a alors $\mu = \frac{1}{p}$ et $\sigma^2 = \frac{1-p}{p2}$

Exemple : On lance un dé à six faces jusqu'à obtenir un « 6 ». La probabilité d'obtenir un 6 au bout de 3 essais est :

$$P(X = 3) = \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{216}$$

E. Loi de POISSON P(λ)

Elle est utilisée le plus souvent pour déterminer la probabilité qu'un certain nombre d'événements interviennent sur la base d'une <u>unité de temps</u> (ou d'autres unités : volume, surface, etc...).
On la retrouve souvent dans les domaines de la qualité, la sécurité et la fiabilité.

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \qquad \lambda > 0 \qquad k \in \mathbb{N} \qquad e = 2,71828...$$

Paramètres :
- λ : taux moyen avec lequel un évènement particulier se produit en général.
- X : variable aléatoire qui donne le nombre d'évènement particulier qui se produisent dans la situation étudiée.

$\mu = \sigma^2 = \lambda$

Exemple : Dans le cabinet d'un dermatologue, on a en moyenne quatre consultations en deux heures. Quelle est la probabilité d'avoir une consultation au cours d'une heure ?
On a λ = 4 hospitalisations pour 2h or ici on cherche une probabilité relative à 1h donc on prend λ = 2 hospitalisations pour 1h.

$$P(X=1)=\frac{2\times e-2}{1!}=2e^{-2}$$

On vient de finir la partie sur les variables aleatoires discrètes, c'est partie pour la suite logique : les variables aleatoires continues.

IV. VARIABLES ALEATOIRES CONTINUES

Ce qui caractérise une variable aléatoire continue, c'est qu'elle a une **<u>probabilité nulle d'être égale à un nombre donné</u>**. C'est pourquoi la loi de probabilité d'une variable aléatoire continue ne peut pas être définie en lisant les probabilités de toutes les éventualités, puisqu'elles sont toutes nulles. En revanche, on sait parler de probabilité pour qu'une variable X prenne une valeur comprise **<u>entre 2 valeurs a et b</u>**. On notera cette probabilité ainsi :

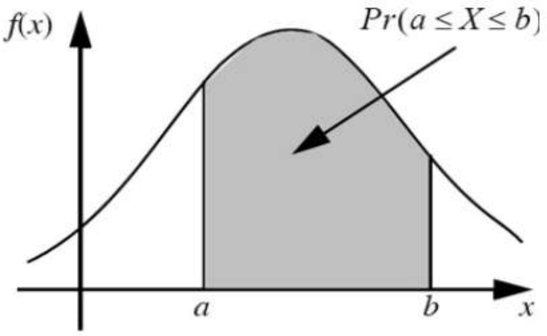
P(a=<X=<b) ou P(X) lorsque X est compris entre A et B

Récap :
P(X=4) = 0 ; P(X=11,22) = 0 ; P(X=√2) = 0
On utilisera donc des intervalles : P(a ≤ X ≤ b) ≠ 0

• La densité de probabilité :
Soit X une variable aléatoire continue prenant des valeurs comprises entre a et b (a et b étant éventuellement infinis). On définit la loi de probabilité de X, ou de distribution de X, à l'aide de la fonction f(x) appelée densité de probabilité de x telle que si f est donnée, la probabilité
C'est une fonction utilisée pour définir la loi de probabilité de X.
<u>P(a ≤ X ≤ b) est l'aire sous la courbe</u>.

Récap :
C'est une fonction utilisée pour définir la loi de probabilité de X.
P(a ≤ X ≤ b) est l'aire sous la courbe.

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$



La formule $P(xk \leq X \leq xn) = \sum_{i=k}^{i=n} pi$ est analogue à $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$

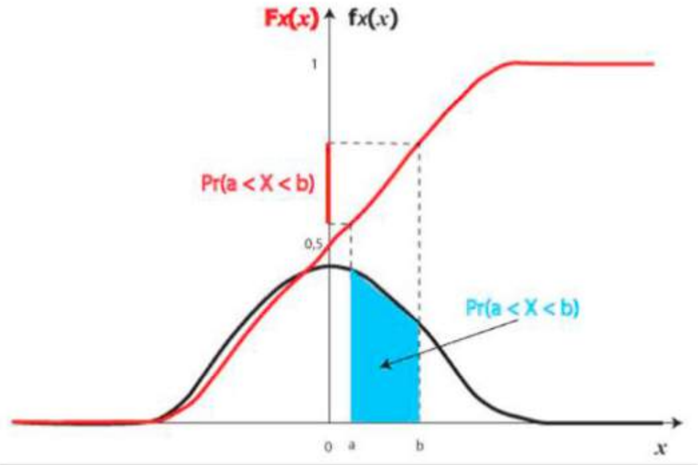
Propriétés :

- $f(x) \geq 0$ (analogue à $p_i \geq 0$)
- $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$ (analogue à $\sum_i p_i = 1$)
- $\mu = E(X) = \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx$ (analogue à $\sum_i x_i p_i$)
- $\sigma^2 = var(X) = \int_{\mathbb{R}} (x-\mu)^2 f(x)dx$ (analogue à $\sum_i (x_i - \mu)^2 p_i$)
- $\sigma^2 = var(X) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)dx - \mu^2$ (analogue à $\sum_i x^2 p_i - \mu^2$).

• La Fonction de Répartition :
Elle est **toujours croissante**, **monotone** et **continue**.
Partant de 0 pour x → -∞
. Atteignant 1 pour x → +∞
Récap des caractéristiques:

- Fonction monotone croissante (attention plus de paliers)
- Partant de 0 pour $x \longrightarrow -\infty$
- Atteint 1 pour $x \longrightarrow +\infty$
- $F(X) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ (analogue à $\sum_{xi \leq xn} pi$)
- $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

(En rouge la fonction de répartition, en noir la fonction de densité)



V. Lois de probabilités continues

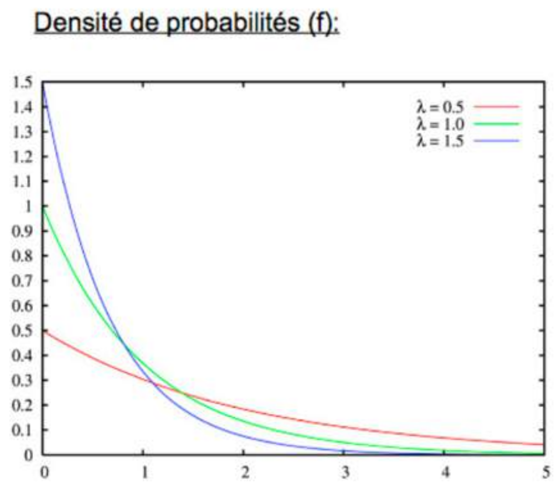
A. Loi EXPONENTIELLE E(λ)

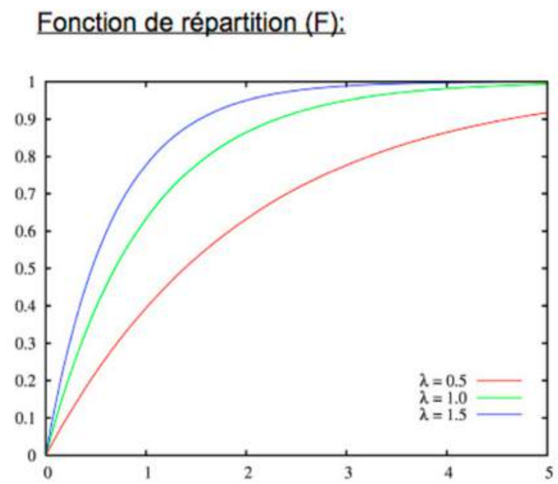
Fonction de densité : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ avec $\lambda > 0$ et $x \geq 0$
Paramètres :
λ = taux de défaillance instantané
- **$\mu = 1 / \lambda$**
- **$\sigma^2 = 1 / \lambda^2$**

Fonction de répartition :

$$f(x) = P(X \geq x) = \int_0^X \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}$$

Si un évènement se réalise selon une loi de Poisson de paramètre λ, le temps entre deux réalisations consécutives de l'évènement considéré est distribué selon une loi exponentielle de paramètre 1/λ.
Elle est utilisée pour décrire un processus de mortalité dans lequel le « risque instantané » de décès(ou taux de défaillance) est constant (durée de vie de composants, d'équipements)





Exemple : La radioactivité peut être décrite ainsi et à chaque instant le taux de radioactivité (la probabilité de désintégration) est constant. C'est-à-dire que peu importe le temps écoulé ou le *nombre d'atomes déjà désintégrés la probabilité que le noyau se désintègre reste la même pour un instant donné.*

B) Loi Uniforme U (a ; b)

Fonction de densité : $f(x) = \frac{1}{b-a}$ si $x \in [a, b]$

$f(x) = 0$ si $x \notin [a, b]$ avec $\lambda > 0$ et $x \geq 0$

Paramètres : intervalle [a,b] ∈ $\mathbb{R}$

• $\mu = (a+b) / 2$

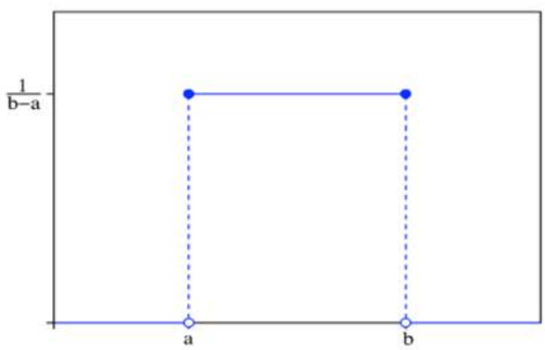
• $\sigma^2 = (b-a)^2 / 12$

Toutes les valeurs ont la **<u>même probabilité</u>** (par exemple un lancer de dé, on a 1/6 de chance pour chaque valeur)

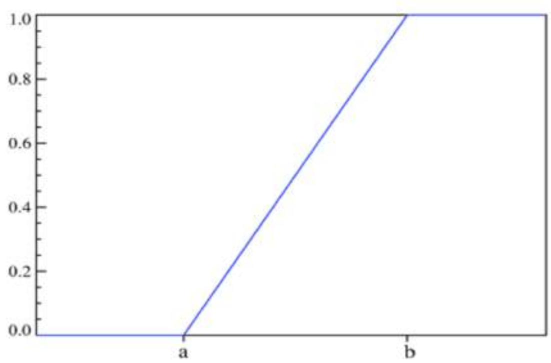
Fonction de densité : f(x) est donc constante sur [a ; b] et nulle en dehors.

Fonction de répartition : F(x) part de 0 pour atteindre 1 de manière linéaire

<u>Densité de probabilités (f):</u>



<u>Fonction de répartition (F):</u>



Exemple : Le boulanger prépare toujours ses croissants avant l'ouverture de la boulangerie. La préparation des croissants se déroule de 06 :00 à 07 :00. Soit l'événement « les croissants sont prêts ». Sa probabilité est définie par une loi uniforme [06 :00 ; 07 :00].

La probabilité que les croissants soient prêts au moins quinze minutes avant l 'ouverture est :

$$\int_6^{6,75} \frac{1}{7-6}\,dx = \frac{6,75-6}{7-6} = 0,75$$

Il y a trois quarts de chance qu'ils soient prêts 1/4 d'heure avant !

C) Loi Normale N(μ ; σ)

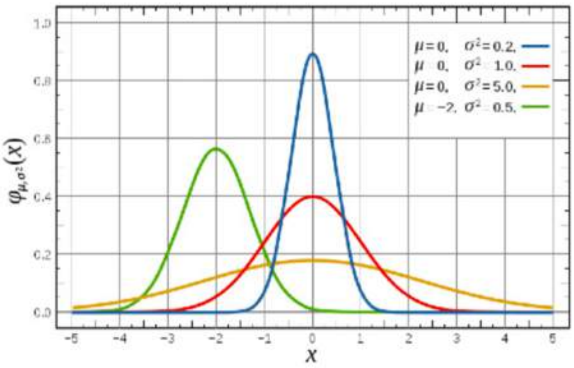
Fonction de densité :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{pour } -\infty \geq x \geq +\infty$$

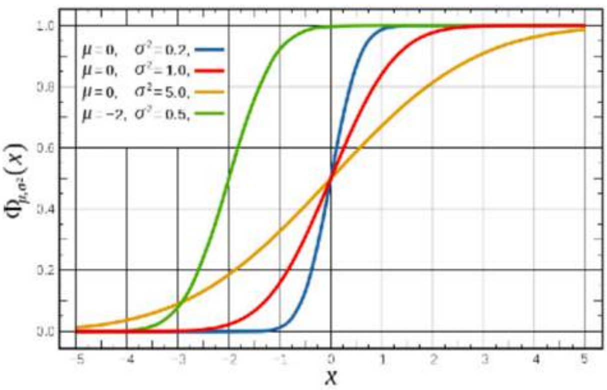
Paramètres : μ et σ, moyenne et écart-type de X

La densité de probabilité d'une v-a normale est symétrique autour de μ et a deux points d'inflexion aux abscisses μ - σ et μ + σ

Densité de probabilités (f):



Fonction de répartition (F):



Valeurs limites importantes à savoir

- il y a 10 chances sur 100 pour que $X < \mu - 1,65\sigma$ ou $X > \mu + 1,65\sigma$
- il y a 5 chances sur 100 pour que $X < \mu - 1,96\sigma$ ou $X > \mu + 1,96\sigma$
- il y a 1 chance sur 100 pour que $X < \mu - 2,58\sigma$ ou $X > \mu + 2,58\sigma$
- il y a 1 chance sur 1000 pour que $X < \mu - 3,30\sigma$ ou $X > \mu + 3,30\sigma$

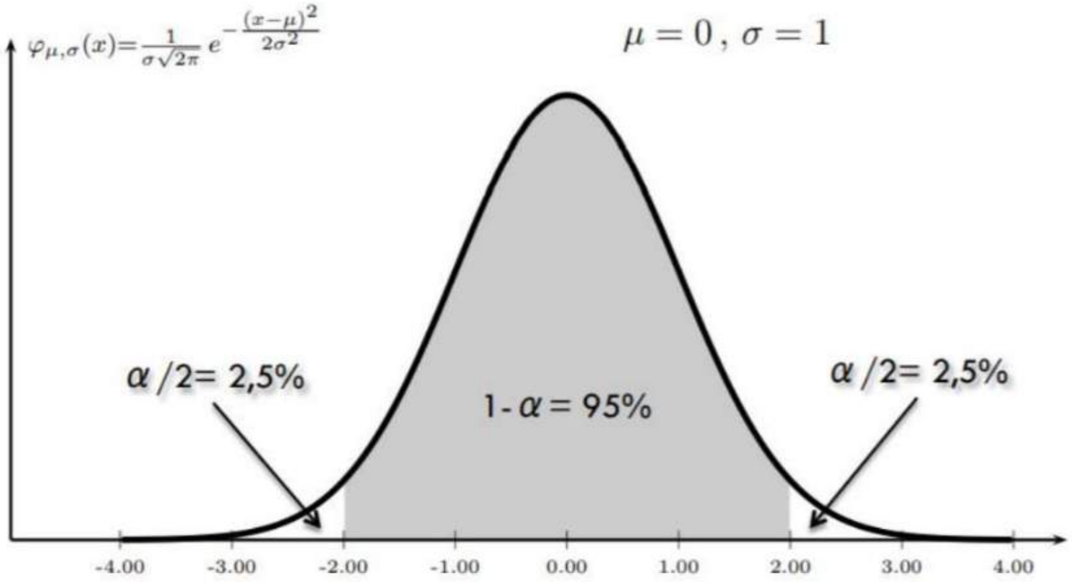
Dans la plupart des applications statistiques de la loi normale (en particulier les tests statistiques), on se servira de la seconde ligne : une variable aléatoire distribuée normalement a 5 chances sur 100 de présenter un écart à la moyenne supérieur à $1,96\sigma$ (on arrondit généralement à 2).

Exemple : Le poids des PASS se répartit selon une loi Normale N(μ ;σ) avec μ=60Kg et σ=10Kg.Ainsi 95% des PACES pèsent entre (μ-1,96σ) = (60- 1,96x10) = (60-19.6) = 40,4 et (μ+1,96σ) =(60+ 1,96x10)= (60+19.6) = 79,6. La taille « X » des hommes adultes suit une loi Normale de moyenne μ = 180cm et d'écart type σ = 6 cm. La proportion d'homme dont la taille est comprise entre 174 cm (μ-σ) et 186 cm (μ+σ) est de 68%. La proportion d'homme dont la taille est inférieure à 168,2 cm (μ- 1,96σ) ou supérieure à 191,8 cm (μ + 1,96σ) est de 2,5% + 2,5% = 5% La proportion d'hommedont la taille est supérieure à 189,9 cm (μ + 1,65σ) est de 5%. La proportion d'homme dont lataille est inférieure à 189,9 cm (μ + 1,65σ) est de 95%.

D. Loi Normale Centrée Réduite N(0 ; 1)

La loi normale centrée réduite est une loi normale de moyenne 0 et de variance 1.
Centrée → Autour de la moyenne μ = 0
Réduite → Ayant une variance σ = 1
N(μ ; σ) =>N(0 ; 1)
Ce changement de variable est très utile en pratique, on peut ramener n'importe quel problème de probabilité à distribution normale (qui suit donc une loi normale) à un seul cas :

celui de la loi normale centrée réduite



VI. APPROXIMATIONS

Certaines lois peuvent être approximées par d'autres selon certaines conditions :

LOIS	CONDITIONS	CONSEQUENCE
BINOMIALE → POISSON	Si **N>50** **p≤0,10** **np ≤ 5**	**B(n;p) → P(λ=np)**
BINOMIALE → NORMALE	Si **np ≥ 5** **nq ≥ 5**	**B(n;p) → N(np;√npq)**
POISSON →NORMALE	Si **λ > 25**	**P(λ) → N(λ;√ λ)**

FIN