Ali'suline

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES, THÉORÈME DE BAYES, INDÉPENDANCE EN PROBABILITÉS

I) Quelque rappels + formule et notation

• **Ω = Ensemble fondamental, l'univers** : **P(Ω) = 1**, cela représente 100% des évènements, la probabilité est certaine.

• **P(A)** : Probabilité de l'évènement A.

• **P(Ā) ou P(∁A)** : Probabilité de l'évènement **contraire** de A, donc de ne pas avoir A. On peut aussi dire que Ā c'est l'univers moins A.

Donc $P(\bar{A}) = P(\Omega) - P(A) = 1 - P(A)$

• $P(A \cap B) = P(B \cap A)$: Probabilité de A et B = Probabilité de B et A (c'est pareil) ou probabilité de A inter B (intersection des évènements A et B).

• $P(A|B) = PB(A)$: probabilité de A **sachant** B **réalisé**.

II) Probabilité conditionnelle

A) Introduction

DÉFINITION → Une probabilité conditionnelle s'intéresse à la probabilité de réalisation d'un évènement A **à condition** qu'un **autre** évènement B ait **déjà été réalisé**.

¤ Autrement dit dans un univers **Ω**, on va définir deux évènements A et B. On va donc s'intéresser à ce que devient la probabilité de A lorsque que B s'est déjà réalisé.

¤ Ainsi on s'intéresse seulement à la réalisation de l'évènement A **parmi** les évènements B réalisés et **non plus** parmi tout l'univers.

On cherche à savoir quelle est la probabilité que A se réalise une fois que B est réalisé.

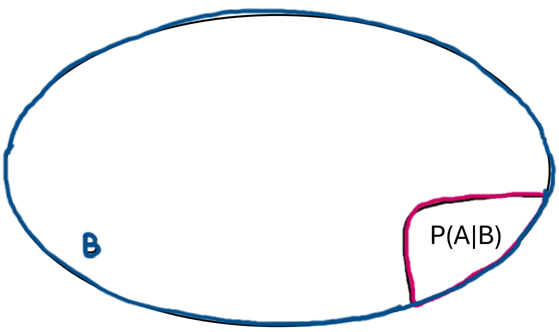
ATTENTION :

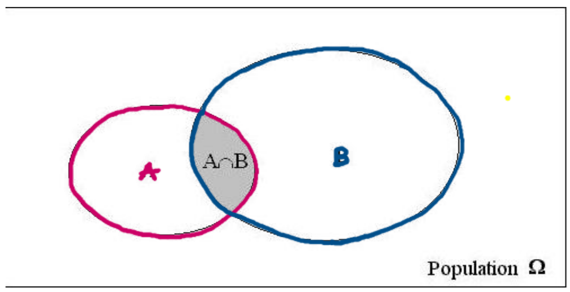
Il faut bien faire la différence entre probabilité **conditionnel** et probabilité de **l'intersection** A∩B

- Pour la **probabilité conditionnel** on s'intéresse à A **au sein de** B.
  C'est une proportion de sujets présentant A **parmi** les sujets présentant B.

- Pour la **probabilité d'intersection**, on regarde **tout l'univers**.
  C'est la proportion de tous les sujets qui présentant **à la fois** A **et** B en **même** temps

Notation : **P(A|B) = PB(A)** : probabilité de A **sachant** B réalisé.





B) Formule probabilités conditionnelle

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

*Équivalence de la formule en lettres : la probabilité qu'un LAS ait perfect la biostat **sachant qu'il** a assisté à tous les cours est égale au nombre de LAS qui ont perfect la biostat ET assisté à tous les cours sur le nombre de LAS qui ont assisté à tous les cours.*

C) Théorème de la multiplication

En biostat, il est important de connaitre le nom des formules et des théorèmes que l'on

Théorème de la multiplication :

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A|B).\ P(B) = P(B|A).\ P(A)$$

Sachant que l'on peut déduire :

$$P(A|B) * P(B) = P(B|A) * P(A)$$

Cette égalité peut se généraliser.
Soient $A_1, A_2, ..., A_n$ des événements quelconques d'un espace probabilisé.
On montre que :
$P(A_1 \cap A_2 ... \cap A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1) \ldots P(A_n/A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_{n-1})$

Exemple pour explication :

Il y a 10 vestes, dont 4 vestes déchirée. On tire 3 veste au hasard. Le théorème de la multiplication va nous permettre de répondre a la question suivante :

Quel est la probabilité que les 3 veste tirée au sort soit défectueuse ?

Pour commencer :
Pour simplifier les calculs on va considérer que P(1^{er} ∩ 2d ∩ 3em) = P(A∩B∩C)

$P(A) = \frac{4}{10}$ $P(B/A) = \frac{3}{9}$ $P(C/B \cap A) = \frac{2}{8}$

D'après le théorème de la multiplication : $P(A \cap B \cap C) = P(A).P(A|B).\ P(C/B\cap A)$

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{4}{10}.\frac{3}{9}.\frac{2}{8} = \frac{1}{30}$$

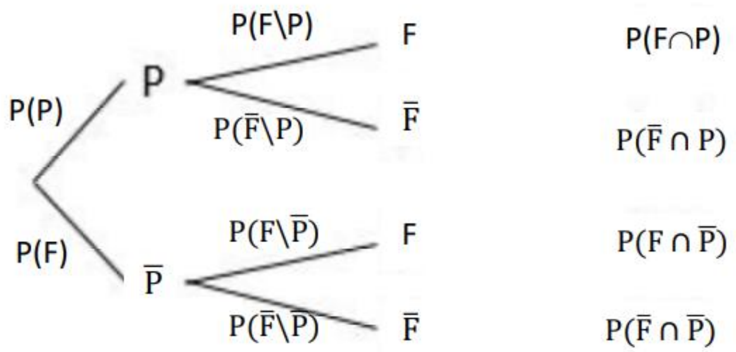
III) Diagramme en arbre (arbre de probabilité)

On considère une séquence **finie** d'expériences dont chacune d'entre elles a un nombre **fini** de résultats possibles.

Les probabilités associées aux résultats possibles d'une expérience dépendent du **résultat de l'expérience précédente** : il s'agit de probabilités **conditionnelles**.

Pour représenter cette séquence, on utilise une représentation « en arbre », le théorème des multiplications permet de calculer la probabilité de **chaque** feuille de l'arbre.

ARBRE DE PROBABILITE



PROPRIÉTÉS :

- La probabilité qu'un chemin particulier de l'arbre se réalise, est d'après le théorème de la **multiplication**, **le produit des probabilités de chaque branche du chemin**

- Les chemins **s'excluent** mutuellement

- La somme des finalités des probabilités de toutes les finalités doit être égale à **1**.

IV. Formule et théorème de Bayes

a) Formule de Bayes

Pour comprendre d'où vient cette formule, il faut reprendre la formule de la probabilité conditionnelle ainsi que le théorème de la multiplication :

Probabilité conditionnelle : $\mathrm{P(A \backslash B)} = \frac{\mathrm{P(A \cap B)}}{\mathrm{P(B)}}$ $\mathrm{P(B \backslash A)} = \frac{\mathrm{P(A \cap B)}}{\mathrm{P(A)}}$

Théorème de la multiplication : $\mathrm{P(A \cap B) = P(A \backslash B) \times P(B) = P(B \backslash A) \times P(A)}$

Ça nous donne la formule de Bayes :

(c'est une continuation des deux théorèmes vus avant)

$$\mathrm{P(B \backslash A)} = \frac{\mathrm{P(A \backslash B) \times P(B)}}{\mathrm{P(A)}}$$

$$\mathrm{P(A \backslash B)} = \frac{\mathrm{P(B \backslash A) \times P(A)}}{\mathrm{P(B)}}$$

b) Théorème de Bayes

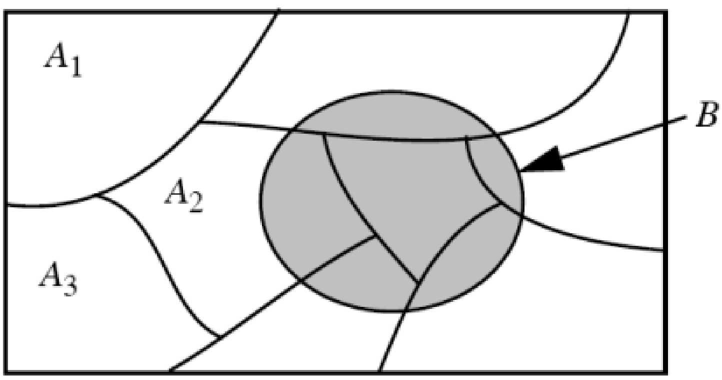
Soit un univers Ω formé par un ensemble d'évènements de A1 à An. On dit que cet ensemble d'évènements de A1 à An constitue une **partition** de **Ω** .

L'ensemble d'évènements de A1 à An dont **l'union** forme Ω. C'est une illustration du théorème des probabilités totales.

Une **partition** de Ω est une **subdivision** de Ω en sous-ensembles **disjoints** dont la réunion forme Ω. Par définition les Ai s'excluent mutuellement et leur union est Ω :

$$\bigcup_{i=1}^{n} Ai = \Omega$$

On considère un évènement B tel que :



➔ Pour chaque A en appliquant la formule de Bayes, on a :

$$\boxed{P(Ai \backslash B) = \frac{P(B \cap Ai)}{P(B)} = \frac{P(B \backslash Ai) \times P(A)}{P(B)}}$$

Cette formule est applicable avec **1 seul et unique A**.

➔ Si l'on souhaite **généraliser** la formule pour **plusieurs événement Ai**, on obtient :

$$\boxed{P(Ai \backslash B) = \frac{P(B \backslash Ai) \times P(Ai)}{\sum_{i=1}^{n} P(B \backslash Ai) P(Ai)}}$$

En médecine, le **théorème** de bayes est utilisé pour résoudre les problèmes **d'aide au diagnostic**.

<u>Exemple :</u>

*Considérons la survenu d'un **symptôme B** (donc évènement B) : exemple un patient qui arrive aux urgence avec des maux de têtes très sévères. Avant tout examen complémentaire, un certain nombre de diagnostics peuvent être évoqués, se manifestant tous par le même symptôme c'est-à-dire des maux de têtes sévères.*
Ce sont ces différents diagnostique qui forment la série d'évènements Ai.

On suppose que tous ces diagnostics ne peuvent **pas** survenir en même temps (ils sont **incompatibles** ou **exclusif**).

Les seules informations que l'on connait sont les probabilités d'avoir le signe **sachant** qu'on a telle ou telle maladie : **P(B\Ai)**

Le problème du diagnostic est donc le suivant : quelle est la probabilité d'avoir la maladie Ai sachant qu'on présente le signe B ? C'est-à-dire $P(A_i/B)$.

V. Évènement indépendant

a) Introduction

Définition : Deux évènements sont **indépendants** si : **$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$**

Les évènements sont **indépendants** dans la mesure où la probabilité de réalisation de A ne **change pas** avec la réalisation de B.
Autrement dit l'apparition d'un des deux évènements **n'influe pas** sur l'apparition de l'autre. *(D'où le fait que ce soit des événement dit « indépendant »)*

Soit :

$$\boxed{P(A|B) = P(A) \text{ et } P(B|A) = P(B)}$$

Conséquence :

- A et B(barre) sont indépendants
- Ā et B sont indépendants
- Ā et B(barre) sont indépendants

Généralisation :

On considère maintenant 3 évènements A, B, et C. Ils seront indépendants si :

- Ils sont indépendants deux à deux : (A indépendant de B, A indépendant de C et C indépendant de B)
- Si $P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$

Remarque :

La seconde condition **n'est pas** une conséquence de la précédente. C'est-à-dire que les trois évènements peuvent être indépendants deux à deux.

Exemple : si P(A∩B∩C) ≠ P(A) alors dans ce cas-là, A,B et C ne sont pas indépendant.

b) Indépendance et inclusion :

Définition :

➔ **A⊂B** : A est inclus dans B donc **P(A ∩ B) = P(A)**

En appliquant la formule de Bayes on obtient :

$$P(A\backslash B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)}$$

Et

$$P(B\backslash A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

Remarque : on a P(A ∩ B) = P(B|A) × P(A) avec la proba de B sachant A égale à 1, car A étant inclus dans B on est certain d'avoir B !

⚠ A et B ne sont PAS indépendants ⚠

c) Indépendance et exclusion

Définition :

Si $(A \cap B) = \emptyset$, alors A et B sont exclusif, disjoints, incompatible et $P(A \cap B) = 0$ (attention aux synonymes), donc $P(A|B) = P(B|A) = 0$.

⚠ A et B ne sont PAS indépendants ⚠

Attention : il ne faut pas confondre les évènements **incompatibles** et évènements **indépendants**.

Les évènements **incompatibles** ne font **pas** intervenir leur probabilité. Ils ne peuvent pas se réaliser en même temps.
Pour rappel, ils sont caractérisés par la relation :

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

Les évènements **indépendants** sont **liés** à leur **probabilité**. Les deux peuvent se produire en même temps mais la réalisation de l'un n'a aucune incidence sur la réalisation de l'autre. Ils sont caractérisés par la relation :

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$$

FIN !!

Ali'suline

Place au dedisss : ⚠️Attention alerte 🚨 dédis aléatoire et random ⚠️ (j'avais vraiment plus aucune inspi désolé)

- Alors déjà dédis au piano de pasteur !!! Ils ont mis un pianoooooooo je suis trop contenteeeee 😲😲😲😲 bon je le monopolise un tout petit peu mais bon mdrrr
- Dédis à Emilie aka « oral B, des dents étincelantes »
- Dédis à Auréa aka « 🤷 »
- Dedis à Tea aka « la marseillaise »
- Dédis aux pingouins de New York
- Dédis aux cochons d'Inde qui habite en Alsace et en Bretagne
- Dédis à Léna, Amandine, Eloïse
- Dédis aux bonbons qui piquent
- Dédis aux girafes vertes
- Dédis au bois
- Dédis aux pantoufles ET aux grenouilles (on ne les oublie pas quand même)
- Dédis aux cartons dans les poubelles jaunes et à l'aluminium qui y traine
- Dédis à Mickey dans la reine des neiges
- Dédis au cachalot du panama
- Dédis au carrelage et à l'Espagne d'Océanie
- Dédis à la mousse du savon quand elle fait exploser la salle de bain
- Et pour finirrrr dédis à l'humour, que je n'ai pas....
- Mais quand même dédis à vous, parce que vous êtes les meilleures et que vous allez gérer ce S2 comme des pros

Enfin, voici quelques **citations** pour vous motiver :

✨✨« La détermination d'aujourd'hui mène au succès de demain » ✨✨

✨✨« Tout est possible, à qui rêve, ose, travail et n'abandonne JAMAIS » ✨✨

✨✨« Je parle avec les yeux, j'écoute avec le cœur, et je comprends avec le temps » ✨✨

✨✨« Agissait toujours comme s'il était impossible d'échouer » ✨✨

✨✨« Le succès n'est pas définitif, l'échec n'est pas fatal, c'est le courage de continuer qui compte » ✨✨

✨✨« la persévérance, est une des qualités indispensable pour réussir dans la vie, quelque soit le but à atteindre, » ✨✨

✨✨✨fais de ta vie un rêve & d'un rêve, une réalité… ✨✨

✨✨« Agissait toujours comme si c'était votre dernière chance » ✨✨

✨✨« Parfois tu oublies que tu es génial alors ceci est ton rappel » ✨✨

✨✨« Chaque réussite, commence avec la volonté d'essayer » ✨✨

✨✨« le succès, c'est de faire des petits pas au quotidien et de continuer le lendemain » ✨✨

✨✨« le futur appartient à ceux qui croient en la beauté de leurs rêves » ✨✨