Introduction aux modèles multivariés

Rappels (définitions) :

- **La statistique :** méthode qui consiste à observer et étudier une ou plusieurs propriétés communes chez un groupe d'être, de choses ou d'entités.

- **Une statistique** : un nombre calculé à partir d'une population (d'êtres, de choses ou d'entités).

- **Population** : collection (d'être, de choses, ou d'entités) ayant des propriétés communes. Ce terme est hérité d'une des premières applications de la statistique : la démographie
Ex : un ensemble de parcelles de terrain étudiées, une population d'animaux, un groupe de patients présentant une maladie définie, l'ensemble des plantes d'une espèce donnée, une population d'humains habitants un lieu particulier…

- **Individu :** élément de la population
Ex : un patient, un insecte, une plante…

- **Variable :** c'est une des propriétés communes aux individus que l'on souhait étudier

  - Qualitative : *Ex : appréciation de la parcelle, l'état de santé de l'insecte, couleur des pétales, appartenance religieuse*

  - Quantitative (=numérique) **continue** (= pouvant prendre n'importe quelle valeur réelle)
Ex : le taux d'acidité du sol, la longueur de l'insecte, la longueur de la tige, l'indice de masse corporelle (IMC)

  - Quantitative (= numérique) **discrète** (= dès qu'il y a un saut minimum obligatoire entre deux valeurs successives, ex : les nombres entiers) : *Ex : la somme (sur tous les jours) du nombre de vaches présentes sur la parcelle, l'âge de l'insecte (en jours), le nombre de pétales sur la fleur, le nombre d'année d'études (réussies) depuis la petite école*

2 types de statistiques :

Statistique descriptive	Statistique inférentielle
Son but est de décrire, c'est-à-dire de résumer ou représenter par des statistiques les données disponibles quand elles sont nombreuses.	Les données sont considérées incomplètes et elle a pour but de tenter de retrouver l'information sur la population initiale. La prémisse est que chaque mesure est une variable aléatoire suivant la loi de probabilité de la population.
Questions types : représentation graphique, paramètres de position et dispersion, divers questions liées aux grands jeux de données	Questions types : estimation de paramètres, intervalles de confiance, tests d'hypothèses, modélisation (ex : régression linéaire)

La statistique peut être :

Univariée : il n'y a qu'une seule variable qui rentre en jeu.

Multivariée : plusieurs variables rentrent en ligne de compte.

- Deux variables entre elles : analyse **bivariée**
- Plusieurs variables : analyse **multivariée**

⇨ Une variable expliquée

⇨ Plusieurs variables explicatives indépendantes deux à deux

Récap :

Statistique descriptive :

- Univariée (moyenne, DS, …)
- Multivariée (ACP, …)

Statistique inférentielle :

- Univariée (tests, …)
- Multivariée (modèles, …)

2e partie : régression linéaire simple

On commence avec des prérequis (non inclus dans le cours) expliqués par ma vieille Charlotte qui permettent de mieux comprendre la suiteè, merci à elle !

Point tut' : en statistique, la régression est une méthode permettant de proposer un **modèle mathématique** pour expliquer les relations entre les observations.
La **régression linéaire simple** consiste à proposer une droite pour expliquer une variable aléatoire **quantitative** par une autre.

Le **coefficient de corrélation linéaire** mesure la **liaison entre 2 variables aléatoires**. Les variables ont un rôle symétrique. Cependant, la question à résoudre peut être plus précise et libellée sous la forme suivante : *« Les valeurs prises par une variable Y dépendent-elles des valeurs de X ? ».*
Ici, les deux variables ne sont pas considérées de manière équivalente :

- **Y** (variable à expliquer, également appelée variable dépendante) est la variable dont on veut **expliquer** les valeurs
- **X** (variable explicative, également appelée variable indépendante) est la variable que l'on veut **utiliser** pour expliquer Y

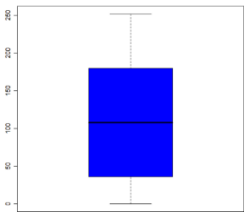
La courbe qui décrit les variations de Y en fonction de X s'appelle **courbe de régression de Y en X.** On peut, en première approximation, chercher à assimiler cette courbe à une **droite**

Exemple introductif :

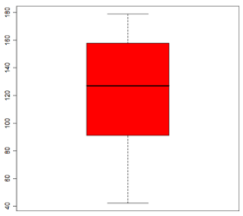
On étudie le lien entre la **taille** et l'**âge** des filles (en mois) sur un échantillon de 637 filles. Questions que l'on se pose :

- Existe-t-il un lien entre la taille et l'âge ? S'il n'existe pas de lien, on obtiendra une droite **parallèle à l'axe des abscisses** (toute variation de X ne produit aucune variation de Y).
- Quand l'âge augmente, est-ce que la taille augmente aussi ?
- Connaissant l'âge, peut-on prédire la taille ? On peut chercher à estimer les zones sans valeur.

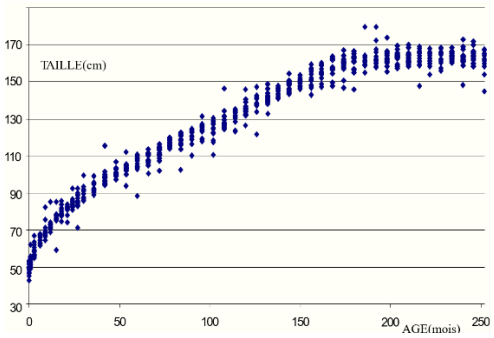
On peut y voir un but médical : par exemple la détection des retards de croissance.
Autre exemple : cela peut permettre aux médecins légistes qui retrouvent un os humain (complet ou fragment) dans la nature, de déterminer l'âge et le sexe.



m = **112,12** mois
s^2 = **6265,86** $mois^2$



m= **122,83** cm
s^2 = **1317,43** cm^2



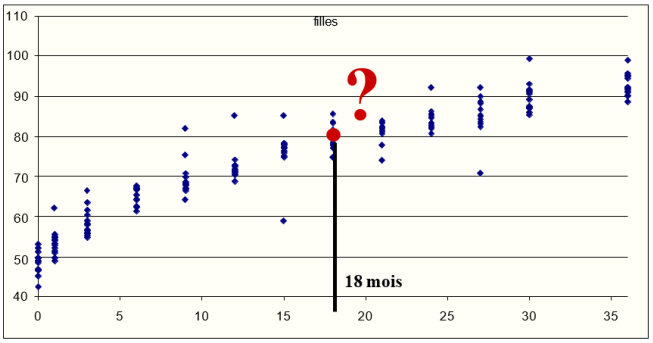
Comment la taille évolue-t-elle en fonction de l'âge ?

Taille = *f*(âge)
Autrement dit, pour une variation de X, quelle est la variation de Y ?
On parle de régression de Y en X :

- Y = taille (cm)
- X = âge(mois)

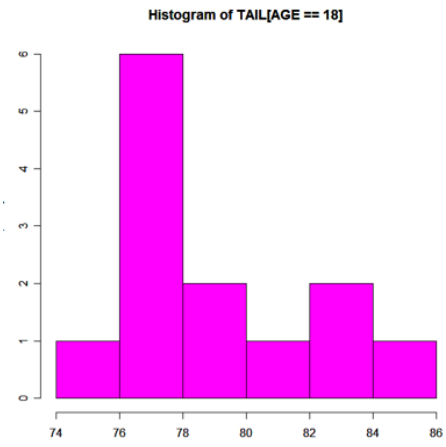
On cherche donc à savoir comment évolue la taille en fonction de l'âge pour chaque valeur d'âge (équation), ou bien encore, quelle est la taille pour un âge donné (valeur et intervalle de confiance).

Exemple au sein d'un groupe de filles : Chez les filles de 18 mois, on va chercher la taille moyenne, la variance de la taille et la distribution.



Méthode pour déterminer l'âge à 18 mois :

- On stratifie les données.
- On sélectionne les filles de 18 mois.
- On calcule les paramètres de la distribution (moyenne et variance)
- On calcule un intervalle de confiance à 95% de la moyenne.



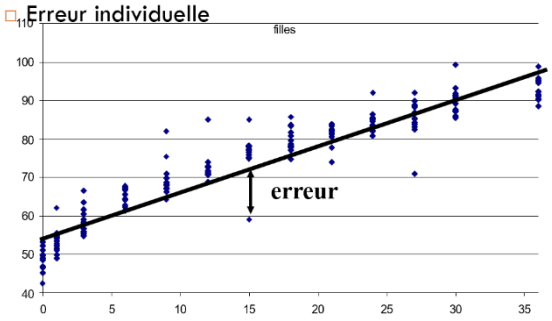
Résultats :
Moyenne observée = M(T/A=18) = 79,23cm
Variance observée = V(T/A=18) = 9,36cm2
On parle d'une distribution conditionnelle = valeur de la taille sachant l'âge (=T/A)

Fonction de régression

La taille en fonction de l'âge, également écrit Moyenne(taille/âge) = f(âge), peut s'exprimer par une fonction f qui est une droite affine de type :

$$y = ax + b$$

Esperance (Taille/Age) = α + β × Age
Pour chaque sujet, on définit taille = **α + β × Age + ε**
ε représente l'erreur individuelle



L'erreur individuelle (ε) est l'écart entre la valeur obtenue par la fonction (y = ax + b) et la vraie valeur observée

S'il n'y a **pas de lien** entre X et Y (pas de corrélation), alors toute variation de X n'entraine **aucune variation de Y**.
On obtient donc une droite **parallèle** à l'axe des **abscisses** d'équation y = constante.
Ainsi, dans y = ax + b, on a : a = O.

Pour chaque individu, par rapport à la moyenne, l'erreur est tant positive que négative, pour **minimiser ces écarts** et s'affranchir du signe, il faut les passer au carré. On va faire la somme des carrés des écarts (SCE).

La **régression linéaire** est le modèle le plus simple pour permettre :

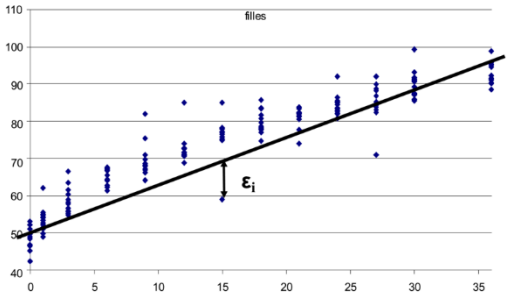
- une interprétation (lien ou non entre les deux variables), permise par la valeur du coefficient de régression qui englobe dans son calcul la pente de la droite, donc la valeur de ß
- une estimation de α et ß pour que la droite d'ajustement minimise l'erreur individuelle
- la prédiction et l'extrapolation

La **droite d'ajustement** est aussi appelée droite de régression.
On dit qu'elle permet de résumer au mieux le nuage de points.

La régression c'est prouver que l'une des deux variables permet de prédire l'autre, c'est-à-dire montrer qu'à partir de X on peut prédire Y. On essaie alors de trouver les valeurs de la droite d'équation : **Y = α + βX + ε**

- Y la variable à expliquer
- X la variable explicative
- α l'ordonnée à l'origine (c'est la valeur de Y pour X=0)
- β la pente (c'est la variation moyenne de la valeur de Y pour une augmentation d'une unité de X)
- ε l'erreur aléatoire

Principe de l'estimation



On veut estimer α et ß tel que ε soit le plus petit possible,
εi représente l'écart entre la droite et le point i.
Pour chaque valeur de X, on a yi = α + βxi + ε
> Or, E(Y/X) = α + βX
> Donc εi = yi – E(Y/X)
> On calcule la somme des carrés des écarts : $SCE = \sum_{i=1}^{n} (\varepsilon_i)^2$

On cherche à estimer α et β tel que la SCE soit **la plus petite possible**

La distance d'un point à la droite est la distance verticale entre l'ordonnée du point observé et l'ordonnée du point correspondant sur la droite.
Cette distance d'un point à la droite représente **l'erreur ε**.
Pour s'affranchir du signe de l'erreur ε, on calcule la somme des carrés des distances de chaque point à la droite (SCE).
La droite de régression est alors la droite qui minimise la somme des carrés des écarts (donc c'est la droite qui passe le plus proche de chaque point du nuage)

Estimation de la pente : $\beta = \frac{cov(XY)}{var(X)}$

- La covariance : cov(X,Y) = covariance de X et de Y. La covariance indique dans quelles mesures deux variables varient ensemble.
- La variance : var(X) = variance de X. La variance est une mesure de la dispersion des valeurs d'un échantillon.

Estimation de l'ordonnée à l'origine α :

La droite passe par mY et mX
On a : mY = α + βmX
Donc α = mY - βmX

L'équation finale s'écrit donc : Y = α + βX + ε

Dans l'exemple, Taille = 73,73 + 0,44 Age + ε ou E(Taille/Age) = 73,73 + 0,44 Age

Une particularité de la **droite de régression** est de passer par le point moyen théorique de coordonnées (mx ; my), où
- mx est la moyenne empirique de X et
- my est la moyenne empirique de Y sur l'échantillon.

L'estimation de **l'ordonnée à l'origine α** est déduit de la **pente β** et des coordonnées du point moyen (mX ; mY) par la formule suivante :

α = mY – βmX

Interprétation

De la pente β +++ :

- β = 0 : pas de lien, évolutions indépendantes
- β < 0 : évolution en sens contraire
- β > 0 : évolution dans le même sens

De l'ordonnée à l'origine :

E (Y/X=0) = α

Test de la pente à 0 : si = β, alors il n'y a pas de lien entre Y et X.

Le lien entre Y et X est-il significatif ? Autrement dit, est-ce que β ≠ 0 ?
Soit b une estimation de β, la fluctuation de b observée peut être due au hasard.
On note les hypothèses :

- H0 : β = 0, il n'y a pas de lien entre X et Y
- H1 : β ≠ 0, il existe un lien entre X et Y

Sous H0, et si les conditions d'application sont respectées, on a une statistique :

$$t_0 = \frac{b-\beta}{\sqrt{s_b{}^2}}$$ qui suit une loi de Student à n-2 DDL, avec :

- L(Y/X) qui tend vers N
- V(Y/X) constantes pour tout X
- à X donné, Yi indépendants

La régression est linéaire

Sur le graphique, à 0 mois (naissance), on a un regroupement de points, il semble ne pas y avoir de lien entre taille et âge. Après 200 mois, on peut tracer une droite parallèle à l'axe des abscisses