Probabilités élémentaires

Introduction (1)

Statistique : triple définition

- **Science** étudiant les propriétés des populations naturelles
- **Grandeur** obtenue à partir d'un ensemble de données d'observation
- **Ensemble d'activités** permettant recueil, traitement et interprétation

Population : ensemble d'objets, d'êtres vivants (population réelle) ou d'objets abstraits (population fictive) de même nature

<u>Ex</u> : tous les P1 goatesques qui regardent ma formidable vidéo

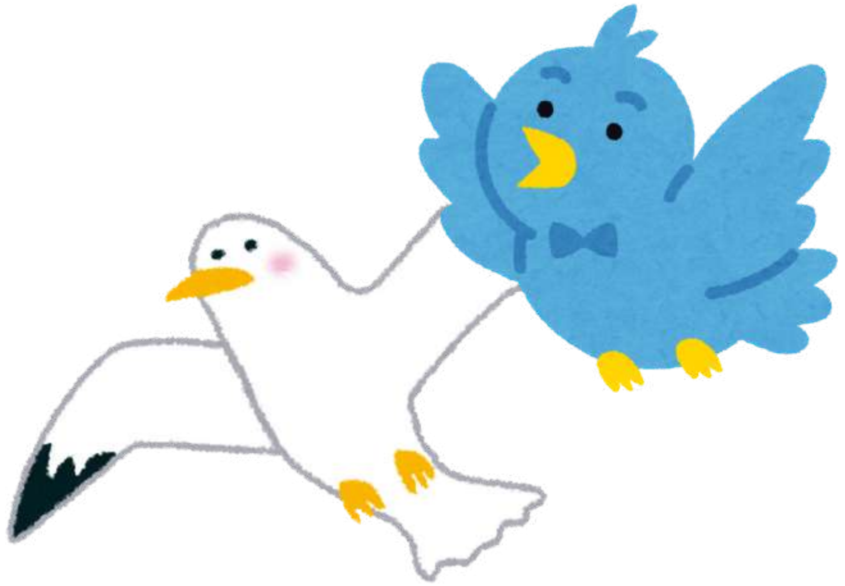
Introduction (2)

Echantillon : sous-ensemble d’une population sur lequel on peut réaliser des opérations statistiques

On retrouve 2 conséquences :

- **Observation partielle** : diversité population ≠ diversité échantillon
- **Variabilité** : échantillon 1 ≠ échantillon 2 ≠ échantillon 3 …

C’est la théorie des probabilités qui permet l’extrapolation des résultats de l’échantillon à la population (hypothèse : sélection aléatoire).



Ensembles

Définitions

Ensemble : liste (ou "collection") d'objets bien définis

Elément : objet particulier qui compose un ensemble

Il existe 2 manières de définir un ensemble :

- **En extension** : on liste tous les éléments
- **En compréhension** : on donne une propriété

Ex : $A = \{1, 2, 3, 4\}$

Ex : $B = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$

Opérations

Opération	Notation	Définition
Intersection	$A \cap B$	Ensemble des éléments appartenant à A **ET** à B
Union	$A \cup B$	Ensemble des éléments appartenant à A **OU** à B
Complémentaire	$\complement A$ ou $\bar{A}$ ou A^C	Ensemble des éléments n'appartenant pas à A
Différence	$A - B$	Ensemble des éléments appartenant à A, mais n'appartenant pas à B
Différence symétrique	$A \triangle B$	Ensemble des éléments appartenant à $A \cup B$, mais n'appartenant pas à $A \cap B$

Algèbre

$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$A \cup \varnothing = A$	$A \cap \Omega = A$
$A \cup \Omega = \Omega$	$A \cap \varnothing = \varnothing$
$A \cup \complement A = \Omega$	$A \cap \complement A = \varnothing$
$\complement\complement A = A$	$\complement\Omega = \varnothing, \complement\varnothing = \Omega$
$\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$	$\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$

Ensembles particuliers (1)

On distingue 2 types d'ensembles :

- **Ensemble fini** : aucun ou nombre fini d'éléments
- **Ensemble infini** : nombre infini d'éléments (dénombrables ou non)

Ensemble produit $A \times B$: ensemble de tous les couples ordonnés de la forme (a, b) tels que $a \in A$ et $b \in B$

Ex : $C = \{6, 8\}$ et $D = \{6, 7\}$ donc $C \times D = \{(6, 6), (6, 7), (8, 6), (8, 7)\}$

Ensembles particuliers (2)

Famille des parties $P(A)$: ensemble de tous les sous-ensembles de A

<u>Ex</u> : $E = \{3, 6\}$ donc $P(E) = \{\varnothing, \{3\}, \{6\}, \{3, 6\}$

Nombre de parties : $\boxed{2^p \text{ avec } p = Card(E)}$

Partition : subdivision d'un ensemble en sous-ensembles disjoints

<u>Ex</u> : $E_1 = \{3\}$ et $E_2 = \{6\}$ forment une partition de E

Dénombrement

p-liste avec remise

p-liste avec remise : p-uplet d'éléments d'un ensemble quelconque avec répétition possible

Ex : F = {12, 24} → 2-uplets : (12, 12) (12, 24) (24, 12) (24, 24)

Nombre de p-listes avec remise : $\boxed{Card(E)^p}$

Points ++ : répétition possible, ordre important

Arrangement

Arrangement sans répétition : groupe de p éléments pris parmi n éléments selon un ordre bien déterminé

Ex : $G = \{5, 7, 8\} \rightarrow$ ASR (2 p. 3) : (5, 7) (7, 5) (5, 8) (8, 5) (7, 8) (8, 7)

Nombre d'arrangements sans répétition : $\boxed{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}}$

Points ++ : répétition non possible, ordre important

Permutation (1)

Permutation sans répétition : arrangement sans répétition avec comme particularité que $p = n$

<u>*Ex*</u> : $H = \{5, 7, 8\} \rightarrow$ *PSR* : $(5, 7, 8)$ $(5, 8, 7)$ $(7, 5, 8)$ $(7, 8, 5)$ $(8, 5, 7)$ $(8, 7, 5)$

Nombre de permutations sans répétition : $\boxed{n!}$

Points ++ : répétition <u>non</u> possible, ordre important

Permutation (2)

Permutation avec répétition : permutation réalisée à partir d'un ensemble dans lequel on distingue des catégories que l'on considère pour l'ordre

<u>Ex</u> : I = {3, 6, 8, 9} → PAR : (P, P, I, I) (P, I, P, I) (P, I, I, P) (I, P, P, I) (I, P, I, P), (I, I, P, P)

Nombre de permutations avec répétition : $\boxed{\dfrac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot \ldots \cdot k_x!}}$

Points ++ : répétition <u>non</u> possible, ordre important

Combinaison

Combinaison : partie à *p* éléments d'un ensemble contenant *n* éléments, sans considération d'ordre ou de répétition

Ex : J = {4, 5, 6, 9} → C (3 p. 4) : {4, 5, 6} {4, 5, 9} {4, 6, 9} {5, 6, 9}

Nombre de combinaisons : $\boxed{C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}}$

Points ++ : répétition non possible, ordre non important

Eléments de probabilités

Définitions

On distingue 2 types de phénomènes :

- **Phénomène déterministe** : issue prévisible, lois physiques
- **Phénomène aléatoire** : issue non prévisible, hasard

Il existe 3 types d'événements :

- **Evénement élémentaire** : vérifié par une unique issue
- **Evénement impossible** : vérifié par aucune issue
- **Evénement certain** : vérifié par chaque issue

Probabilité (1)

Probabilité : fonction associant à un événement un nombre compris entre 0 et 1 et permettant de mesurer ses chances de réalisation

Théorème des probabilités totales : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

<u>Cas particulier</u> : événements incompatibles $\rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Quelques propriétés :

- $P(\emptyset) = 0$; $P(\Omega) = 1$; $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$; $A \subset B \Rightarrow P(A) < P(B)$

Probabilité (2)

Formule de Poincaré : $$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{(k-1)} \left(\sum_{1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) \right)$$

<u>Synonymes</u> : *“additivité forte”, “crible”, “inclusion-exclusion”*

Pour *n = 2* :

- Formule des probabilités totales

Pour *n = 3* :

- $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - [P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C)] + P(A \cap B \cap C)$

Equiprobabilité

Equiprobabilité : chaque événement élémentaire a la même probabilité

Formule pour un événement *A* quelconque : $\boxed{P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}}$

PS : Card(A) désigne le nombre de cas favorables et Card(Ω) correspond au nombre de cas possibles

<u>Ex</u> : lors d'un lancer de dé (Card(Ω) = 6), la probabilité d'obtenir un chiffre pair (Card(A) = 3) vaut 1/2 (3/6)

Probabilité sur un ensemble fini

Propriétés dans un ensemble fini :

- $0 \leq p_i \leq 1$
- $\Sigma\, p_i = 1$

Exemple de situation

Dé biaisé :

i	1	2	3	4	5	6
p_i	1/3	1/6	1/12	1/12	1/4	?

Calcul : $p6 = 1 - (1/3 + 1/6 + 1/12 + 1/12 + 1/4) = 1 - 11/12 = 1/12$




Fin