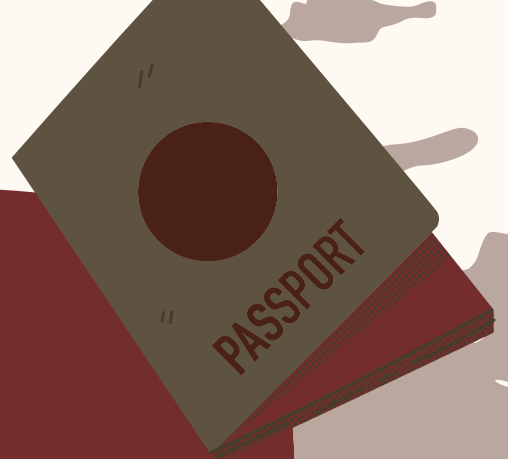
VARIABLE ALÉATOIRE

LOI DE PROBABILITÉ DISCRÈTE ET CONTINUE

Dulclaudiax



SOMMAIRE

DÉFINITIONS

- **Variable aléatoire = épreuve menant à des évènements élémentaires qui sont des <u>nombres</u>**
- 2 types :
  - **Discrète** : résultat compris dans un ensemble fini/dénombrable
  - **Continue** : résultat compris dans un ensemble infini indénombrable (réels)

DÉFINITIONS

- **Moyenne μ :** indicateur de position

$$\mu = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n = \sum_{i=1}^{i=n} x_ip_i$$

- **Espérance E(x) :** synonyme de moyenne en probabilités et statistiques

<u>Théorème de l'Espérance</u>

Soit X une variable aléatoire et k une constante réelle

$$\begin{bmatrix} E\left(kX\right) = kE\left(X\right) \\ E\left(k + X\right) = E\left(X\right) + k \end{bmatrix}$$

Soit X et Y deux variables aléatoires

L'Espérance de la somme est la somme des espérances

$$E\left(X + Y\right) = E\left(X\right) + E\left(Y\right)$$

DÉFINITIONS

- **Variance σ^2 et écart-type σ** : paramètres de dispersion

- **Variable centrée réduite**

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

On a alors $E(Y)=0$ et $Var(Y)=1$

VARIABLE ALÉATOIRE DISCRÈTE

DEFINITION

Définie en donnant l'ensemble des valeurs $p_1, p_2, \dots, p_n$ qui sont les probabilités des différentes éventualités $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$p_i = P(X = x_i)$$

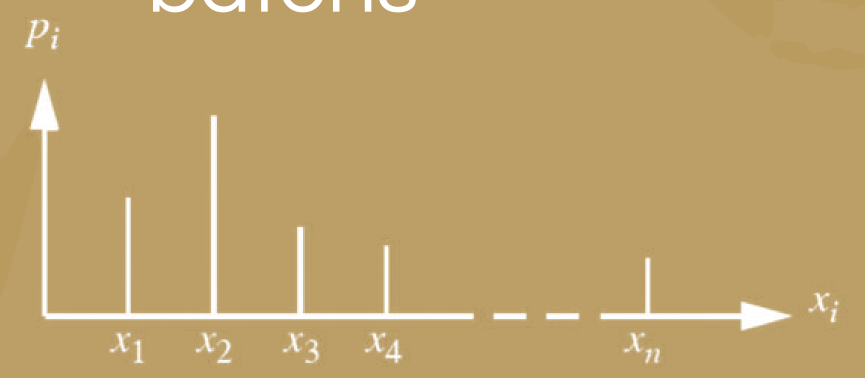
$$\sum p_i = 1$$

REPRESENTATION

- Table

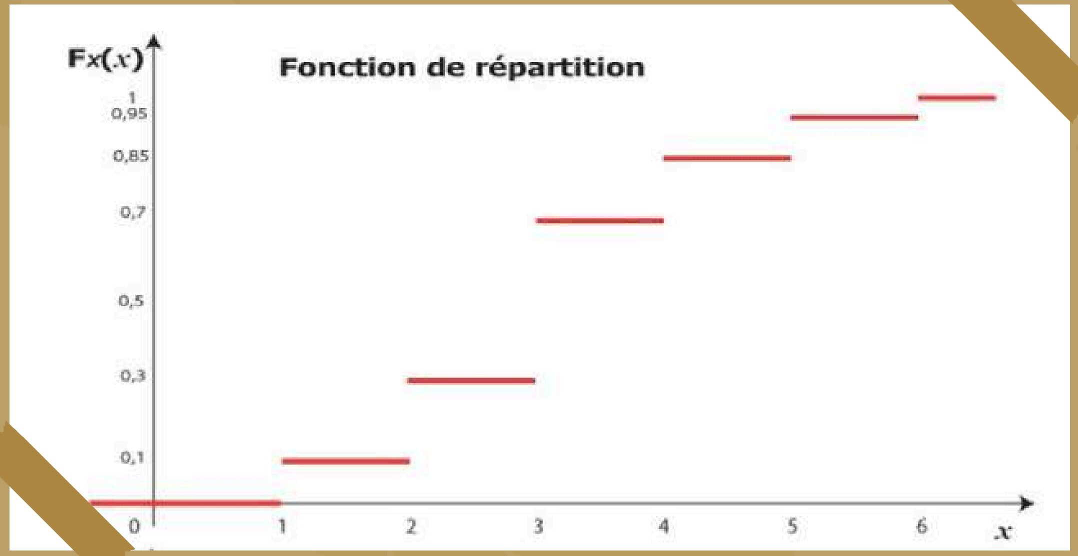
x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\dots$
p_1	p_2	$\dots$	p_n	$\dots$

- Diagramme en bâtons

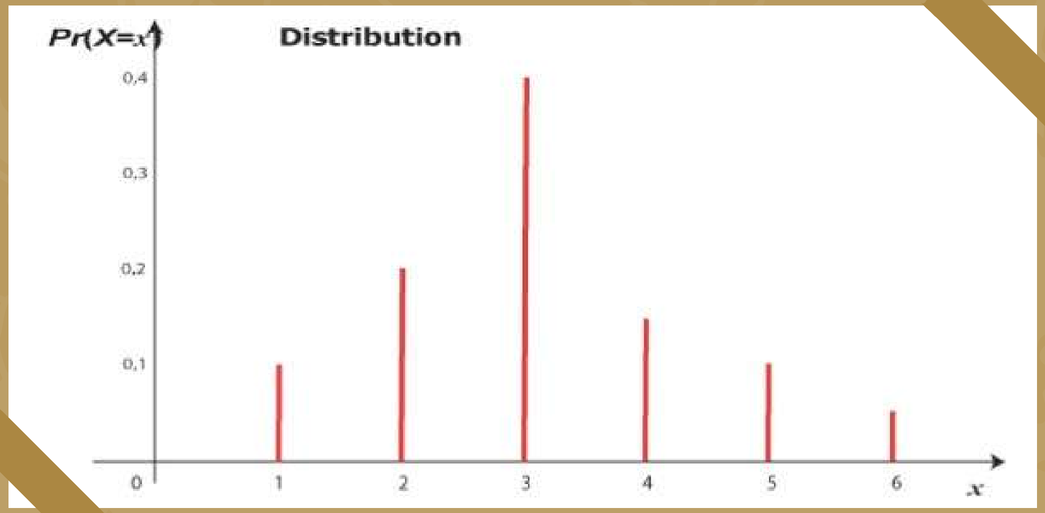


VARIABLE ALÉATOIRE DISCRÈTE

Fonction de répartition



Distribution



LOI DE BERNOULLI $\mathcal{B}(p)$

→ Expérience aléatoire dont l'issue est un "succès" ou un "échec"

Paramètres

- **p** : probabilité d'un succès
- **q = 1 - p** : probabilité d'un échec
- **X** : variable aléatoire « nombre de succès » lors d'une épreuve

- **μ = p**
- **σ^2 = p (1 - p) = pq**

$$P(X=k) = p^k(1-p)^{1-k} = p^k q^{1-k} \quad \text{pour} \quad k \in \{0,1\}$$

EXEMPLE

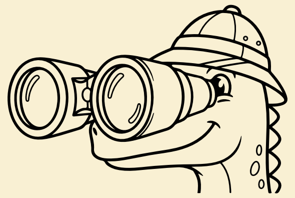
→ On a une boite avec 2 boules rouges et 6 boules noires. Soit l'évènement « tirer une boule noire » le succès. Quelle est la probabilité d'avoir un succès ? La probabilité de n'en avoir aucun ?

EXEMPLE

→ On a une boite avec 2 boules rouges et 6 boules noires. Soit l'évènement « tirer une boule noire » le succès. Quelle est la probabilité d'avoir un succès ? La probabilité de n'en avoir aucun ?

Rappel : $P(X = k) = p^k(1-p)^{1-k} = p^k q^{1-k}$ $p = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

$P(X = 0) = \frac{3^0}{4}\frac{1^1}{4} = \frac{1}{4}$ $P(X = 1) = \frac{3^1}{4}\frac{1^0}{4} = \frac{3}{4}$



LOI BINOMIALE $\mathcal{B}(n;p)$

➔ Epreuves répétées de Bernoulli = répétition d'essais indépendants d'une même expérience aléatoire dont l'issue est soit un « succès », soit un « échec ».

- **μ = np**
- **σ^2 = np (1 - p) = npq**

Rappel : $C_n^k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$

Paramètres:

- **n** : nombre d'essais indépendants
- **p** : probabilité d'un succès
- **q** : probabilité d'un échec
- **X** : variable aléatoire « nombre de succès » à l'issue de essais

$$P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k}$$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$

EXEMPLE

→On reprend une boite avec cette fois 4 boules rouges et 6 noires. Soit l’évènement “tirer une boule noire” le succès. On tire trois fois une boule dans cette boite et chaque tirage est indépendant des autres. On cherche la probabilité de tirer une boule noire soit P(X=1).

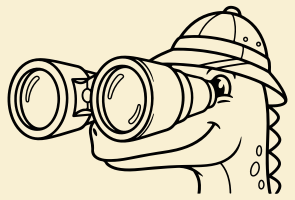
EXEMPLE

→On reprend une boite avec cette fois 4 boules rouges et 6 noires. Soit l'évènement “tirer une boule noire” le succès. On tire trois fois une boule dans cette boite et chaque tirage est indépendant des autres. On cherche la probabilité de tirer une boule noire soit P(X=1).

Rappel : $$P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k}$$

Données : k=1 ; n=3 ; p=6/10 ; q=4/10

$$P(X=1) = C_3^1 \times \left(\frac{6}{10}\right)^1 \times \left(\frac{4}{10}\right)^2 = \frac{3!}{2!1!} \times 0,6 \times 0,16 = 3 \times 0,096 = 0,288$$



LOI BINOMIALE $\mathcal{B}(n;p)$

Particularités

- Taux de sondage **n/N**
- Si **n/N ≥ 0,10**, alors loi binomiale → **loi hypergéométrique**

- Lorsque **n est grand** et **p n'est pas trop proche de 0 ou de 1**, alors loi binomiale → **loi normale**

LOI GÉOMETRIQUE $\mathcal{G}(p)$

→ Répétition d'épreuves de Bernoulli jusqu'à obtention d'un succès

- **μ =** $1/p$
- **σ² =** $\frac{1-p}{p^2}$

Paramètres:

- **p** : probabilité d'un succès
- **q** : probabilité d'un échec
- **X** : variable aléatoire « nombre d'essais nécessaires jusqu'à l'obtention du 1er succès »

$$P(X=k) = p(1-p)^{k-1} = pq^{k-1}$$ pour $k \in \mathbb{N}^*$

EXEMPLE

→ On lance un dé à six faces jusqu’à obtenir un “6”. Quelle est laa probabilité d’obtenir un “6” au bout de 3 essais ?

EXEMPLE

→ On lance un dé à six faces jusqu'à obtenir un "6". Quelle est laa probabilité d'obtenir un "6" au bout de 3 essais ?

Rappel :

$$P\left(X=k\right)=p(1-p)^{k-1}=pq^{k-1}$$

$$P\left(X=3\right)=\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{2}=\frac{25}{216}$$

LOI HYPERGÉOMÉTRIQUE $\mathfrak{H}(N;D;n)$

Soit une population de N individus parmi lesquels D ont un caractère donné. On prélève un échantillon de taille n, sans remise, soit au fur et à mesure, soit d'un seul coup.

- **μ =** $\frac{nD}{N} = np$
- **σ² =** $\left(\frac{N-n}{N-1}\right) npq$

Paramètres:

- **N** : effectif de la population
- **n** : effectif de l'échantillon
- **D** : nombre d'individus/objets avec la caractéristique donnée
- **p = D/N** : probabilité d'avoir la caractéristique donnée au sein de la population
- **q = 1-p** : probabilité de ne pas avoir la caractéristique
- **X** : variable aléatoire du nombre d'individus de l'échantillon possédant la propriété recherchée

$$P(X=k) = \frac{C_D^k \times C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}$$ avec $$min\,(0; n-D) \leqslant k \leqslant max\,(n; D)$$

EXEMPLE

→ Dans une usine, il y a 1000 machines dont 200 ont des défauts. On tire au sort 300 machines dans cette population. Quelle est la probabilité que la moitié de cet échantillon ait des défauts ?

EXEMPLE

→ Dans une usine, il y a 1000 machines dont 200 ont des défauts. On tire au sort 300 machines dans cette population. Quelle est la probabilité que la moitié de cet échntillon ait des défauts ?

Rappel :

$$P(X = k) = \frac{C_D^k \times C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}$$

Données :

- k = 150
- D = 200
- n = 300
- N = 1000

$$P(X = 150) = \frac{C_{200}^{150} \times C_{800}^{150}}{C_{1000}^{300}}$$

LOI DE POISSON $\wp(\lambda)$

On l'utilise pour modéliser des phénomènes aléatoires où les évènements se réalisent sur la base d'une unité de temps, de volume, de surface...

- **$\mu = \sigma^2 = \lambda$**

Paramètres:

- **λ** : taux moyen avec lequel un évènement particulier apparait
- **X** : variable aléatoire qui donne le nombre d'évènements qui se produisent dans la situation étudiée

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad \text{avec} \quad \lambda > 0,\ k \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad e = 2,71828\ldots$$

EXEMPLE

→ Dans le cabinet d'un dermatologue , on a en moyenne quatre consultations en deux heures. Quelle est la probabilité d'avoir une consultation au cours d'une heure ?

EXEMPLE

→ Dans le cabinet d'un dermatologue , on a en moyenne quatre consultations en deux heures. Quelle est la probabilité d'avoir une consultation au cours d'une heure ?

Rappel : $$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

✈ λ = 2 (hospitalisations pour 1h)

$$\Rightarrow P(X=1)=\frac{2\times e^{-2}}{1!}=2e^{-2}$$

VARIABLE ALÉATOIRE CONTINUE

Définition

Une VA continue a une **probabilité nulle d'être égale à n'importe quel nombre donné**.
Elle prend une valeur <u>comprise entre deux valeurs</u> **a** et **b**.

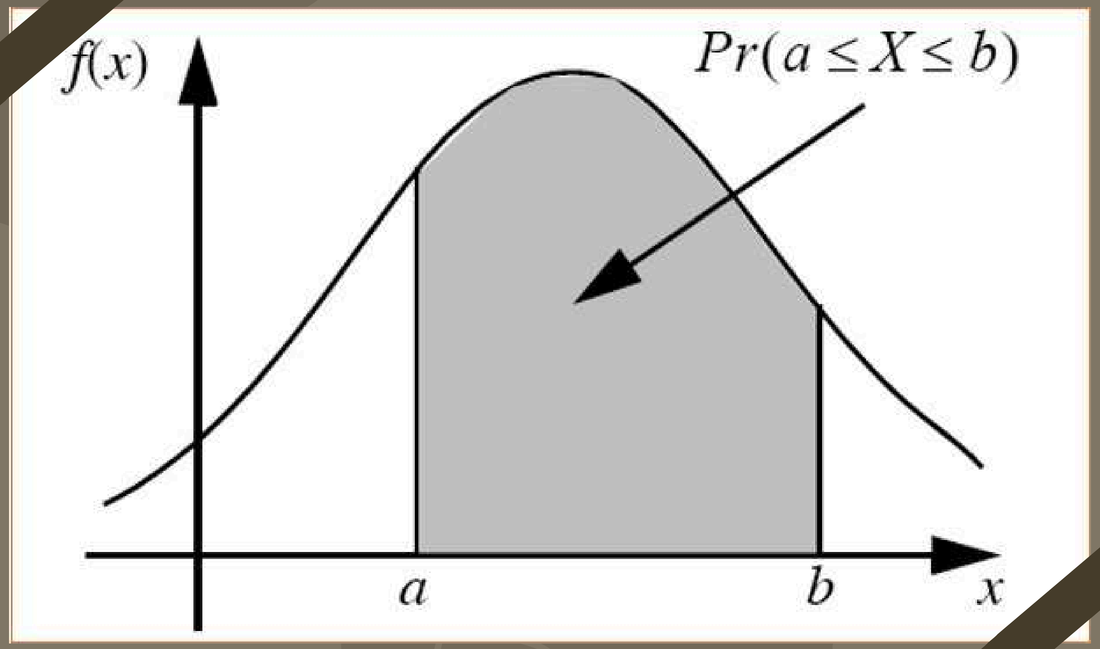
Notation

$$P\left(a \leqslant X \leqslant b\right)$$

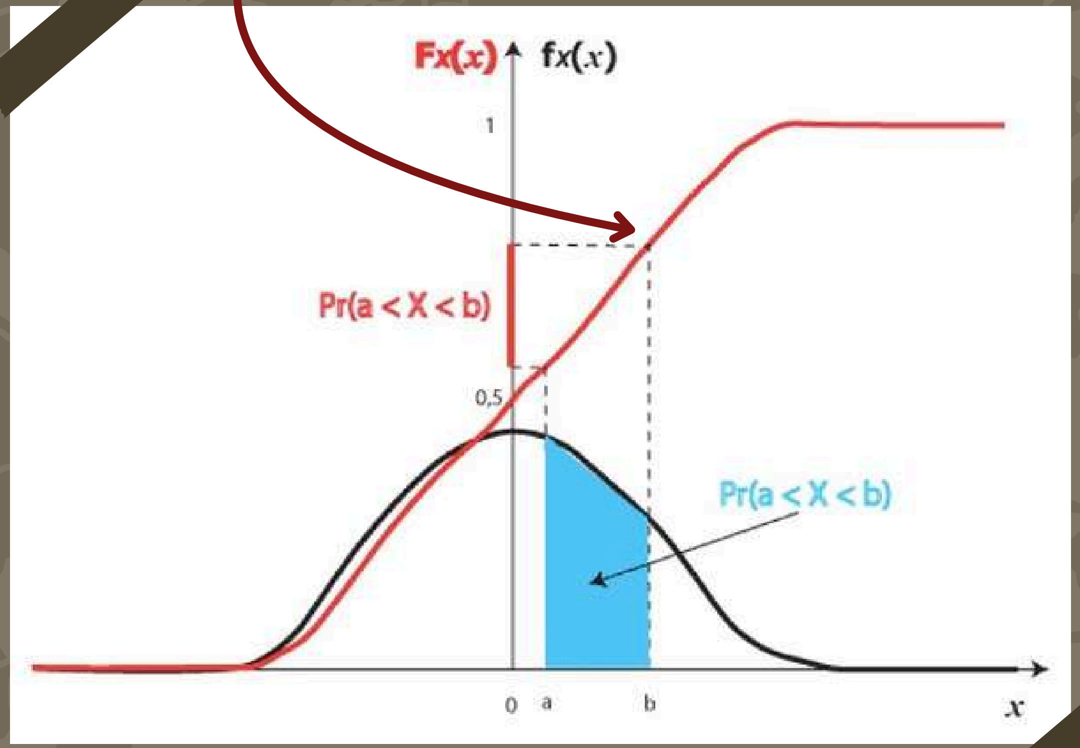
$$P\left(X \in [a;b]\right)$$

VARIABLE ALÉATOIRE CONTINUE

Densité de probabilité



Fonction de répartition



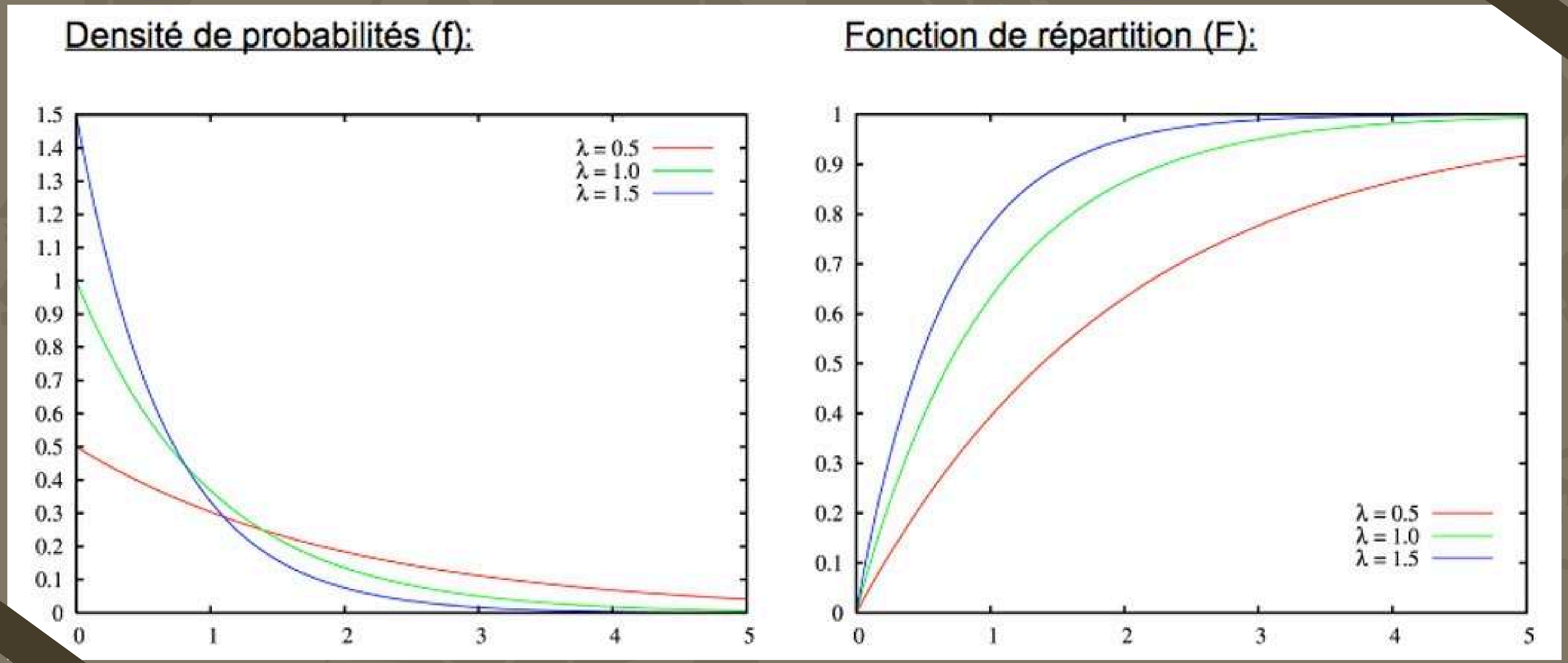
LOI EXPONENTIELLE

→ Processus de mortalité dans lequel le « risque instantané » (ou taux de défaillance) de décès est constant (durée de vie des composants ou d'équipements).

- **$\mu = 1/\lambda$**
- **$\sigma^2 = 1/\lambda^2$**

Paramètres:

- **λ** : taux de défaillance instantanée



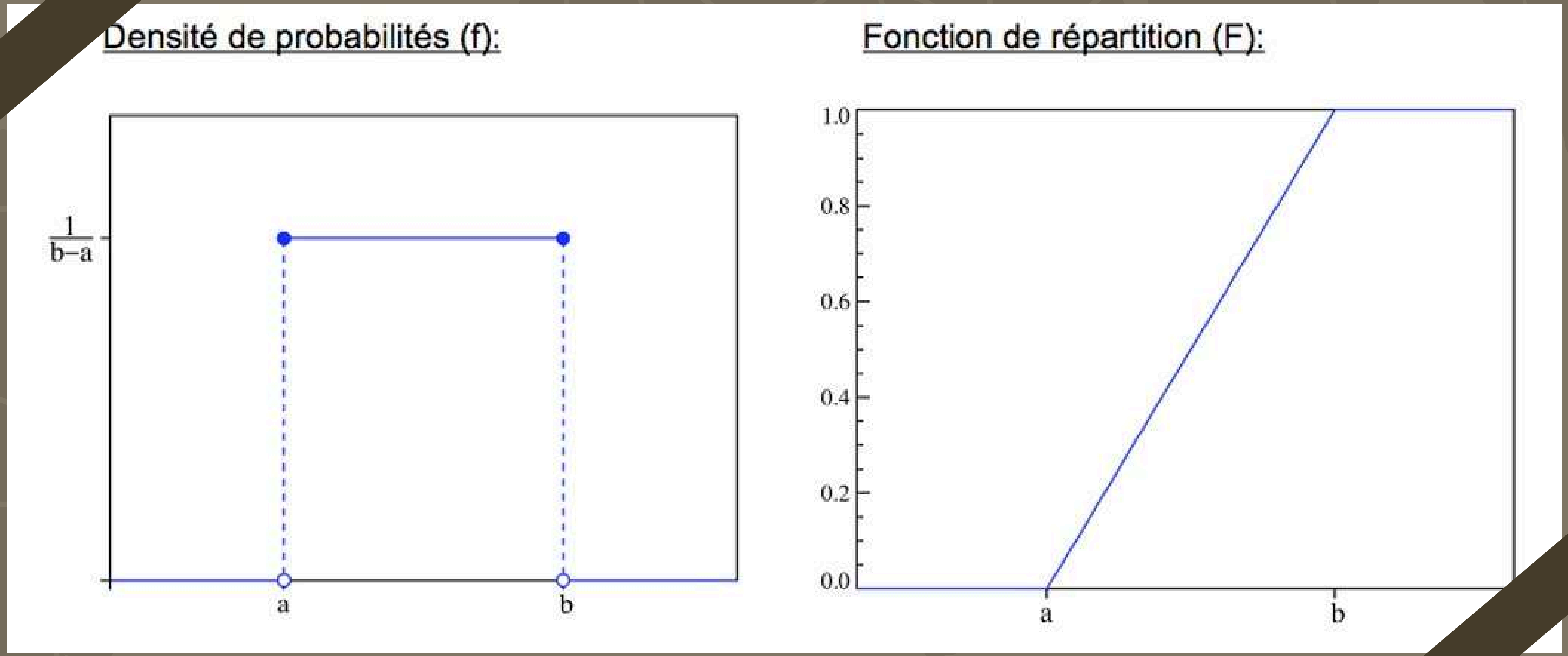
LOI UNIFORME

Chaque point de l’intervalle a la même probabilité (ou densité). Il s’agit du modèle où “tout est équiprobable”.

- μ = $(a+b)/2$
- σ² = $(b-a)^2/12$

Paramètres:

- **Intervalle [a;b] appartenant à R**



EXEMPLE

→ Le boulanger prépare toujours ses croissants avant l’ouverture de la boulangerie. La préparation des croissants se déroule de 06h00 à 07h00. Soit l’évènement “les croissants sont prêts”. Quelle est la probabilité que les croissants soient prêts au moins 15 minutes avant l’ouverture ?

EXEMPLE

→ Le boulanger prépare toujours ses croissants avant l'ouverture de la boulangerie. La préparation des croissants se déroule de 06h00 à 07h00. Soit l'évènement "les croissants sont prêts". Quelle est la probabilité que les croissants soient prêts au moins 15 minutes avant l'ouverture ?

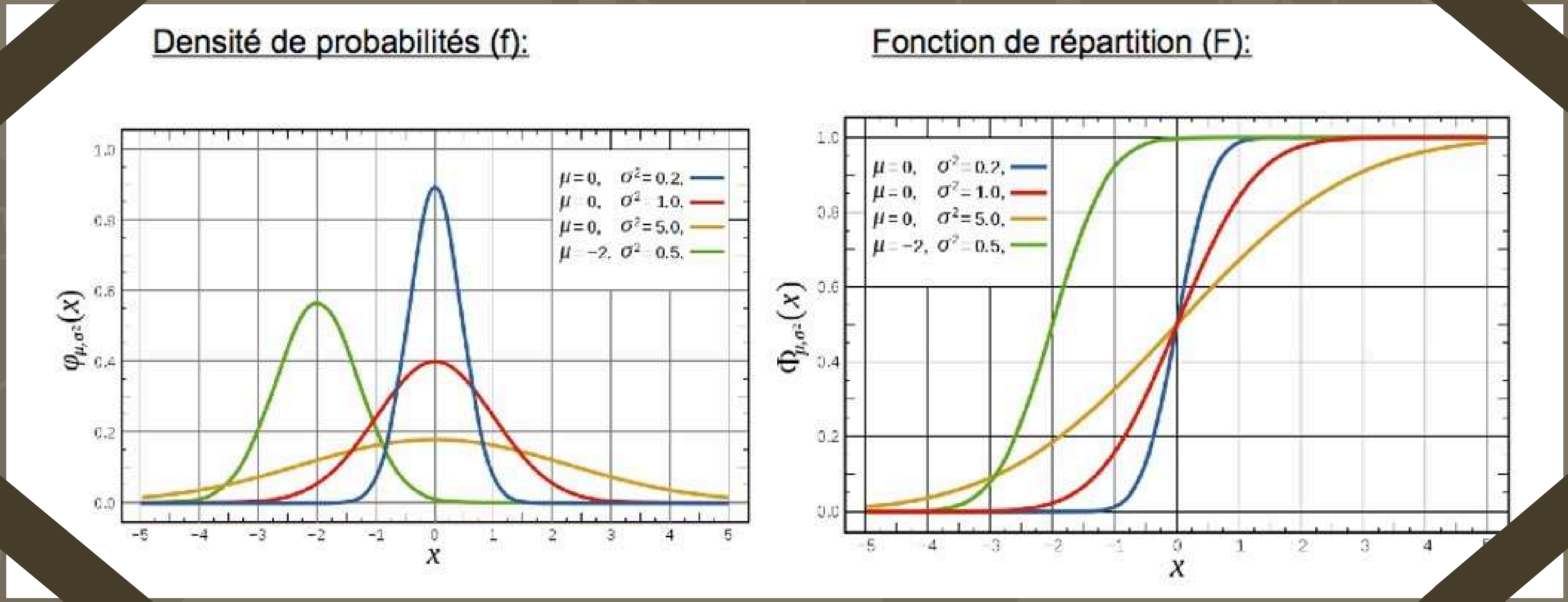
La probabilité de l'évènement est définie par une loi uniforme [06:00;07:00]

$$\int_{6}^{6,75} \frac{1}{7-6}dx = \frac{6,75-6}{7-6} = 0,75$$

LOI NORMALE

➡ Phénomènes où la plupart des valeurs se trouvent autour de la moyenne et les valeurs plus extrêmes sont plus rares.

Paramètres:
- **μ** : moyenne de X
- **σ** : écart-type de X



LOI NORMALE

Particularités

- Il y a **10 chances sur 100** pour que $X < \mu - 1{,}65\sigma$ ou $X > \mu + 1{,}65\sigma$
- Il y a **5 chances sur 100** pour que $X < \mu - 1{,}96\sigma$ ou $X > \mu + 1{,}96\sigma$
- Il y a **1 chance sur 100** pour que $X < \mu - 2{,}58\sigma$ ou $X > \mu + 2{,}58\sigma$
- Il y a **1 chance sur 1000** pour que $X < \mu - 3{,}30\sigma$ ou $X > \mu + 3{,}30\sigma$

EXEMPLE

→ Le poids des LAS se répartit selon une loi normale N(μ;σ) avec μ = 60kg et σ = 10kg.

- Ainsi, 95% des LAS pèsent entre ??? et ???

EXEMPLE

→ Le poids des LAS se répartit selon une loi normale N(μ;σ) avec μ = 60kg et σ = 10kg.

- Ainsi, 95% des LAS pèsent entre **40,4kg** et **79,6kg**

Rappel : il y a 5 chances sur 100 pour que X < μ - 1,96σ ou X > μ + 1,96σ

$$\mu - 1,96\sigma = 60 - 1,96 \times 10 = 60 - 19,6 = 40,4$$

$$\mu + 1,96\sigma = 60 + 1,96 \times 10 = 60 + 19,6 = 79,6$$

EXEMPLE

→ La taille “X” des hommes adultes suit une loi normale de moyenne $\mu = 180$ cm et d’écart-type $\sigma = 6$ cm.

- La proportion d’hommes dont la taille est supérieure à 189,9cm est ???

EXEMPLE

→ La taille “X” des hommes adultes suit une loi normale de moyenne μ = 180 cm et d’écart-type σ = 6 cm.

- La proportion d’hommes dont la taille est supérieure à 189,9cm est **5%**

$$189,9 - \mu = 189,9 - 180 = 9,9$$

$$\frac{9,9}{\sigma} = \frac{9,9}{6} = 1,65$$

<u>**Rappel**</u> : Il y a 10 chances sur 100 pour que X < μ - 1,65σ ou X > μ + 1,65σ

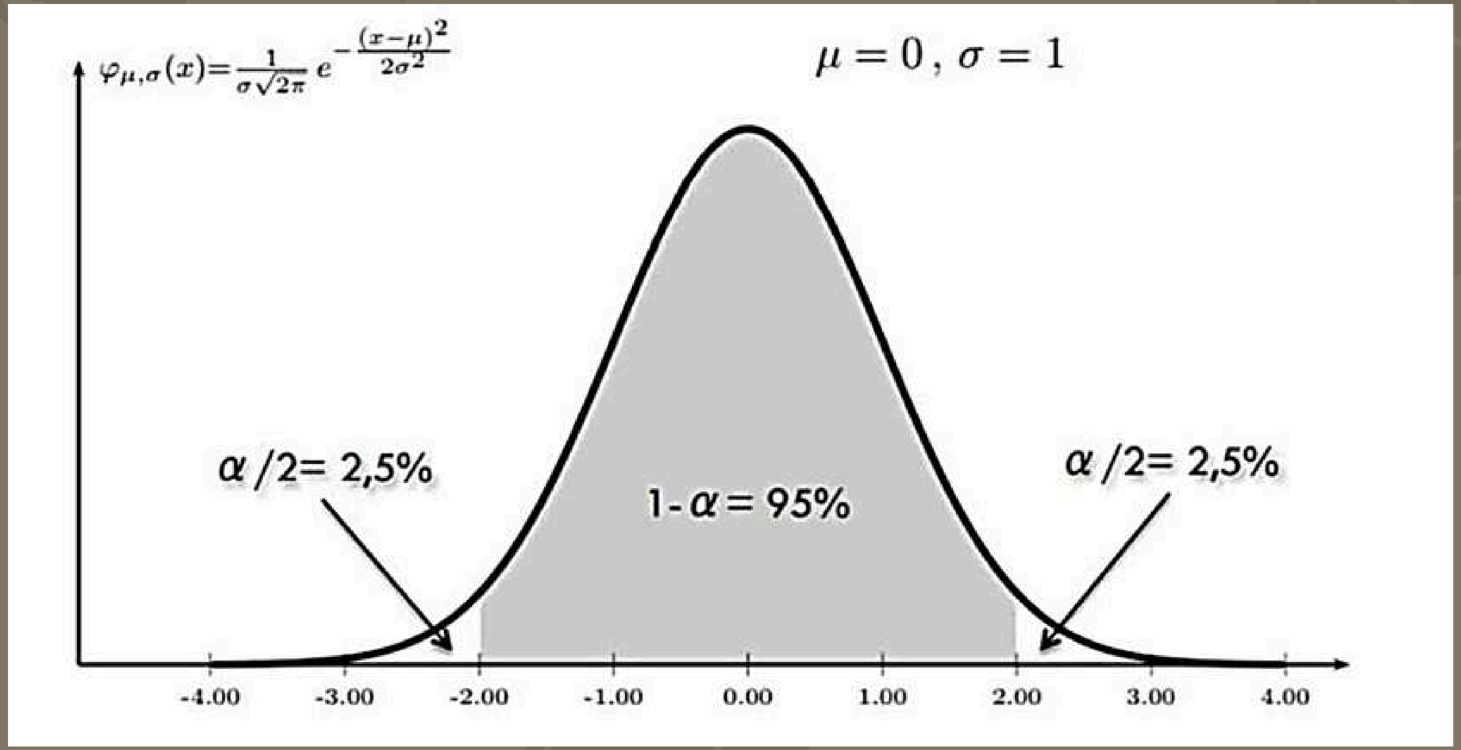
LOI NORMALE CENTRÉE RÉDUITE

➡ C'est une loi normale qui a été ajustée : elle a une moyenne de 0 et une variance (ou écart-type) de 1.

Elle est :

- Centrée autour de la moyenne (0)
- Réduite par l'écart-type (1)

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$$



Paramètres:

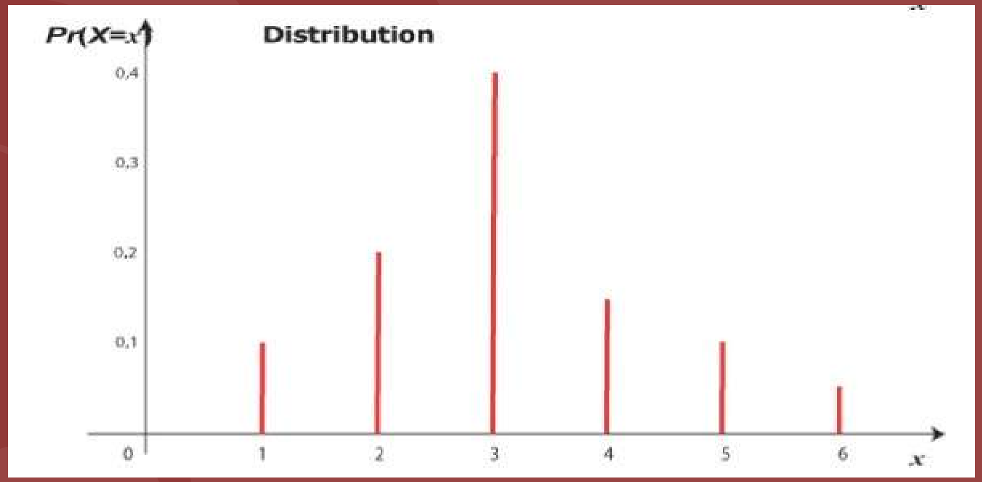
- **μ = 0** : moyenne
- **σ = 1** : écart-type
- **Z** : variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite

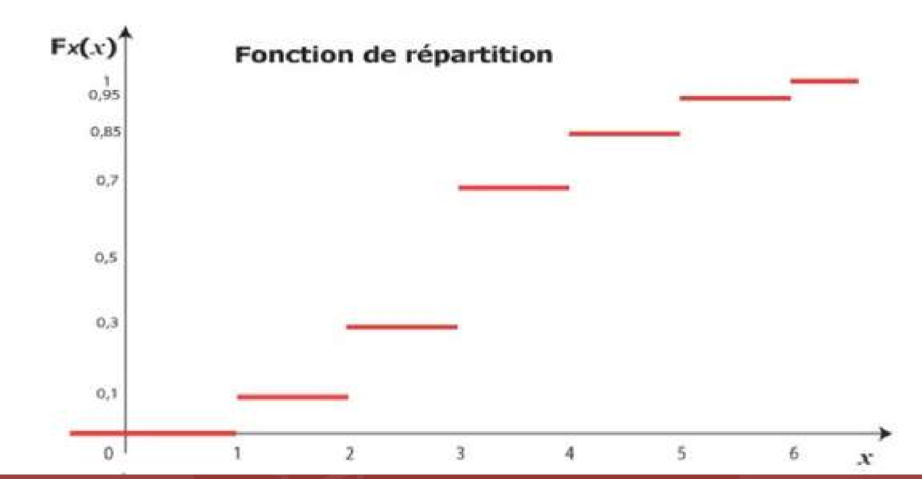
APPROXIMATIONS

Lois	Conditions	Conséquences
Binomiale → Poisson	Si : → $N > 50$ → $p \leq 0{,}10$ → $np \leq 5$	$B(n;p) \rightarrow P(\lambda = np)$
Binomiale → Normale	Si : → $np \geq 5$ → $nq \geq 5$	$B(n;p) \rightarrow N(np; \sqrt{npq})$
Poisson → Normale	Si : → $\lambda > 25$	$P(\lambda) \rightarrow N(\lambda; \sqrt{\lambda})$

COMPARATIF

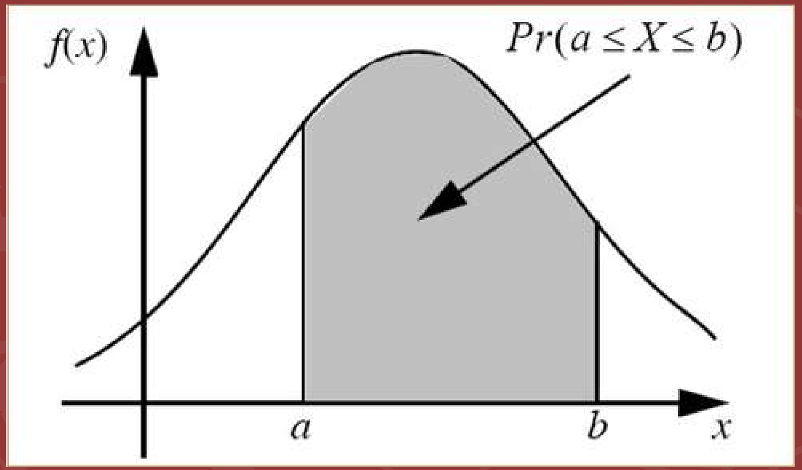
VA DISCRÈTE

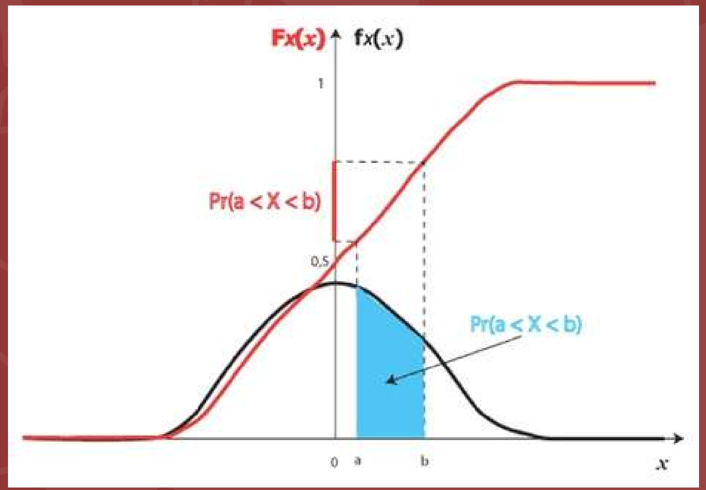




$$P\left(x_k \leqslant X \leqslant x_n\right) = \sum_{i=k}^{i=n} p_i$$

VA CONTINUE





$$P\left(a \leqslant X \leqslant b\right) = \int_a^b f\left(x\right) dx$$

RECAPITULATIF

Lois	Bernoulli	Binomiale	Géométrique	Hypergéométrique	Poisson
Situation de départ	**1 seule épreuve avec 2 issues** possibles (succès/ échec)	**n épreuves de Bernoulli indépendantes**, identiques, à 2 issues	Epreuves de Bernoulli répétées **jusqu'au 1er succès**	**Tirage sans remise** (échantillon) dans une **population** finie de taille **N** avec **D** malades	**Nb d'évènements** rares, indépendants, dans un **intervalle** (temps…) fixe (avec **taux λ**)
On calcule QUELLE PROBA ?	Proba d'**un succès** (ou échec) sur une **seule** épreuve	Proba d'avoir **k succès parmi n épreuves**	Proba que le **1er premier** succès arrive au bout du **k-ième essai**	Proba d'avoir **k "malades"** (ou "k" avec une caractéristique donnée) dans **l'échantillon**	Proba d'observer **k évènements** dans l'intervalle
Exemple	Un patient reçoit un traitement (TTT) : proba qu'il réponde au TTT (succès)	Sur n patients traités, proba que k répondent au TTT	Nb d'essais nécessaires jusqu'au 1er patient qui répond au TTT	Dans une pop avec N patients dont D sont malades, proba d'avoir k malades dans un échantillon de taille n	Proba qu'un médecin voie k urgences en 1h si le taux est λ consultations/h

BON COURAGE POUR LE S2 !