

## Définition

**Matrice  $M(n,p)$**  : tableau de nombres composé de  $n$  lignes et  $p$  colonnes

Ex :  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$  est une matrice composée de 2 lignes et 3 colonnes

On distingue 2 cas :

- **$p = 1$**  : la matrice est univariée
- **$p \geq 2$**  : la matrice est multivariée

Ex :  $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$

Ex :  $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$



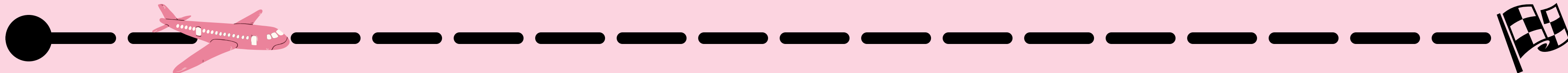
# Matrices particulières

**Matrice carrée** (d'ordre  $n$ ) :  $n =$  nombre de lignes = nombre de colonnes

$$\underline{\text{EX}} : D = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \text{ est carrée d'ordre } 2$$

**Matrice identité** (d'ordre  $n$ ) : matrice carrée d'ordre  $n$  dont les coefficients diagonaux valent 1 et les autres valent 0

$$\underline{\text{EX}} : I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ est la matrice identité d'ordre } 2$$



# Opérations (1)

**Transposée  ${}^T M(p,n)$**  : permutation du rôle des lignes et des colonnes

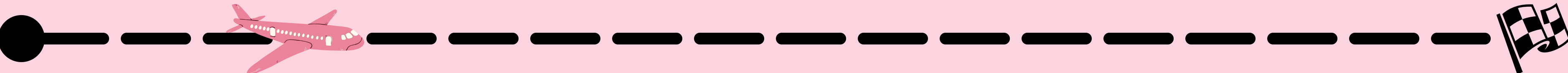
$$\underline{\text{Ex}} : E = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow {}^T E = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$$

On distingue 2 cas particuliers :

- **${}^T M = M$**  : la matrice est symétrique
- **${}^T M = -M$**  : la matrice est antisymétrique

$$\underline{\text{Ex}} : F = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\text{Ex}} : G = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$



## Entraînement

Soit  $H$  la matrice définie par :  $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

**Consignes :**

- Indiquer le nombre de lignes et de colonnes de la transposée de  $H$
- Déterminer la transposée de  $H$



**MQNPGJ**

*Bonus : en déduire le type de symétrie de  $H$*



# Réponses

**Nombre de lignes et de colonnes de  ${}^T H$  :** 3 lignes et 2 colonnes

**Détermination de  ${}^T H$  :**  ${}^T H = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

**Symétrie de  $H$  :** ni symétrique, ni antisymétrique



## Opérations (2)

**Déterminant  $\det(M)$**  : valeur particulière utile pour déterminer l'inversibilité

On s'intéresse à 2 cas :

- **Ordre 2** :  $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$

Ex :  $\det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = 2 \times 5 - 0 \times 4 = 10$

- **Ordre 3** :  $\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = a \times \det \begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - b \times \det \begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix} + c \times \det \begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix}$



## Entraînement

Soit  $J$  la matrice définie par :  $J = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 4 & 8 & 5 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

**Consignes :**

- Donner une formule du déterminant de  $J$
- Calculer le déterminant de  $J$



EYEQSI



*Bonus : en déduire l'inversibilité de  $J$*



## Réponses

**Formule de  $\det(\mathbf{J})$  :**  $\det(\mathbf{J}) = -4 \times \det \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} + 8 \times \det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - 5 \times \det \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

**Calcul de  $\det(\mathbf{J})$  :**  $\det(\mathbf{J}) = -16$

**Inversibilité de  $\mathbf{J}$  :** inversible



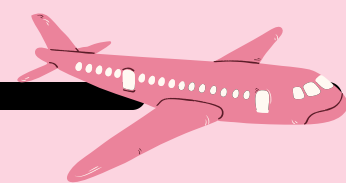
## Opérations (3)

**Inverse  $M^{-1}$** : matrice vérifiant la relation  $M \times M^{-1} = I$

**Conditions**:  $M$  carrée et  $\det(M) \neq 0$

**Ordre 2**:  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \times \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Ex:  $K = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow K^{-1} = \frac{1}{48} \times \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/16 & -5/48 \\ -1/16 & 7/48 \end{pmatrix}$

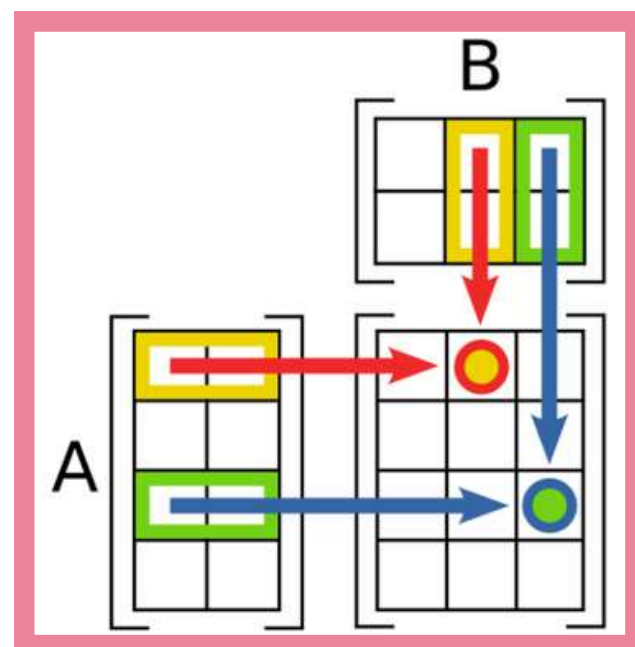


## Opérations (4.1)

**Produit  $M \times N$**  : multiplication de 2 matrices entre elles (ici  $M$  et  $N$ )

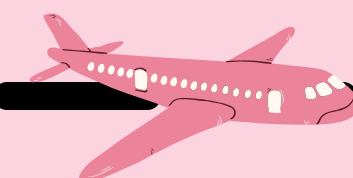
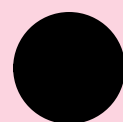
**Condition** : nombre de colonnes de  $M$  = nombre de lignes de  $N$

**Méthode** :



$$\underline{\text{Ex}} : L = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \text{ et } O = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$L \times O = \begin{pmatrix} 3 \times 12 + 6 \times 5 \\ 1 \times 12 + 7 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66 \\ 47 \end{pmatrix}$$



## Opérations (4.2)

### Remarques :

- $M \times N$  n'est pas toujours égal à  $N \times M$ , mais si c'est le cas on dit que les matrices  $M$  et  $N$  commutent
- Le produit  $M(n,p) \times N(p,m)$  donne un résultat de la forme  $R(n,m)$
- Le produit  ${}^T M \times M$  donne toujours une matrice carrée d'ordre  $p$  symétrique



## Entraînement

Soient  $P$  et  $Q$  les matrices définies par :  $P = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  et  $Q = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

### Consignes :

- Justifier l'existence du produit  $P \times Q$
- Calculer le produit  $P \times Q$



EDLBQD

*Bonus : indiquer si  $P$  et  $Q$  commutent*



# Réponses

**Existence de  $P \times Q$**  : nombre de colonnes de  $P$  = nombre de lignes de  $Q$

**Calcul de  $P \times Q$**  :  $P \times Q = \begin{pmatrix} 4 & 59 \\ 1 & 16 \end{pmatrix}$

**Commutativité de  $P$  et  $Q$**  : non-commutantes car  $Q \times P = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 19 \\ 3 & 0 & 9 \\ 4 & 0 & 12 \end{pmatrix}$



## Opérations (5)

**Puissance  $M^n$**  : multiplication d'une matrice par elle-même ( $n$ -fois)

**Condition** :  $M$  carrée

**Matrice nilpotente** (d'ordre  $n$ ) : matrice carrée qui vérifie  $M^n = 0$  et  $M^{n-1} \neq 0$

Ex :  $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  est nilpotente d'ordre 3 car  $S^3 = 0$  et  $S^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$



# Analyse factorielle (1)

**Définition** : ensemble de techniques dont le but est de résumer avec une perte minimale et contrôlée (++) les informations contenues dans de gros tableaux de données

On distingue 2 techniques principales :

- **ACP** : technique plus ancienne (1933) ; variables quantitatives
- **AFC** : technique plus récente (1970s) ; variables qualitatives



## Analyse factorielle (2)

**Intérêt** (++) : extraction d'un maximum d'informations sous une forme simple et cohérente à partir d'une importante quantité de données (description synthétique)

L'ACP permet de mettre en évidence 2 éléments :

- **Redondance** : interrelations entre variables
- **Profils** : ressemblances / oppositions entre individus



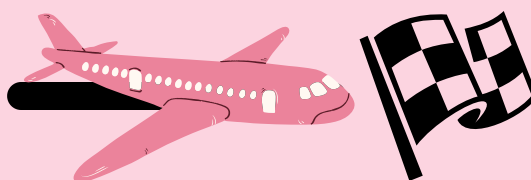
## Analyse factorielle (3)

On distingue 2 situations :

- **Données homogènes** : il faut centrer les données
- **Données hétérogènes** : il faut centrer-réduire les données

**Définitions** : centrer = moyenne à 0 ; réduire = écart-type à 1

**Objectif** : gommer les effets de taille pour aboutir à une ACP normée





**Fin**

