Iwatarax

Probabilités élémentaires

Probabilités élémentaires

Petit mot

Helloooo tout le monde, j'espère que vous vous portez bien en ce beau début de S2 ! Je vous souhaite la bienvenue avec ma toute première fiche de biostatistiques (aka ✨Biostar✨ pour les intimes).

Aujourd'hui, nous allons plonger dans le formidable monde des probabilités pour un cours reprenant des concepts assez fondamentaux que vous devriez déjà connaître plus ou moins.

Pour résumer, ce cours aborde les notions de statistique, d'ensemble et de dénombrement (y a pas que ça, mais c'est le plus important).

Introduction

Le terme "statistique" peut désigner 3 éléments :
- **Science** étudiant les propriétés des populations naturelles
- **Grandeur** obtenue à partir d'un ensemble de données d'observation
- **Ensemble d'activités** permettant le recueil, le traitement et l'interprétation des caractères étudiés

Une **population** correspond à un ensemble d'objets, d'êtres vivants (population réelle) ou d'objets abstraits (population fictive) de même nature.

Exemple : tous les étudiants de LAS de France

Une population étant généralement grande (voire infinie), l'étude exhaustive de tous les éléments qui la composent est souvent impossible, c'est pourquoi on s'intéresse plutôt à un sous-ensemble de cette population : l'**échantillon**

Le fait de travailler sur un échantillon présente 2 conséquences :
- **Observation partielle** du caractère : la diversité du caractère étudié entre l'échantillon et la population d'origine n'est pas forcément la même (il faut donc veiller à la représentativité de l'échantillon)
- **Variabilité** des échantillons : la diversité du caractère étudié d'un échantillon à un autre est variable (il faut faire en sorte que, malgré cette variabilité, l'extrapolation à la population étudiée soit possible)

La **théorie des probabilités** correspond à une branche des mathématiques qui permet de modéliser les phénomènes où le hasard intervient.

Dans le cadre des statistiques, cette théorie permet notamment l'extrapolation de la caractéristique observée sur l'échantillon, en partant de l'hypothèse que la sélection des éléments qui composent l'échantillon est effectuée au hasard.

Ensembles

Définitions

Un **ensemble** correspond à une liste (ou collection) d'objets bien définis *(ex : les étudiants de LAS de Nice)* tandis qu'un **élément** correspond à un objet particulier qui compose un ensemble *(ex : toi qui lis cette fiche)*.

Il est possible de définir un ensemble de 2 manières :
- **En extension** (ou explicite) : on liste tous les éléments *(ex : E = {2, 4, 6, 8})*
- **En compréhension** (ou implicite) : on donne la ou les propriété(s) qui caractérise(nt) les éléments *(ex : E = {x : x est pair et compris entre 2 et 8})*

Quelques notations

$p \in E$: l'élément p appartient à l'ensemble E

$A \subset B$: l'ensemble A est inclus dans l'ensemble B

$\emptyset$: l'ensemble vide (il ne contient aucun élément)

Ω : l'ensemble universel (il contient tous les éléments)

Opérations

Il est possible d'effectuer différentes opérations avec des ensembles :

Opération	Notation	Définition
Intersection	$A \cap B$	Ensemble des éléments appartenant à A **ET** à B
Union	$A \cup B$	Ensemble des éléments appartenant à A **OU** à B
Complémentaire	$\complement A$ ou $\bar{A}$ ou A^C	Ensemble des éléments n'appartenant pas à A
Différence	$A - B$	Ensemble des éléments appartenant à A, mais n'appartenant pas à B
Différence symétrique	$A \triangle B$	Ensemble des éléments appartenant à $A \cup B$, mais n'appartenant pas à $A \cap B$

Remarque

Lorsque $A \cap B = \emptyset$, on dit que les ensembles A et B sont ***disjoints****.*

Algèbre des ensembles

A partir des notations et opérations que l'on vient de voir, il est possible de mettre en place les formules suivantes :

$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$A \cup \varnothing = A$	$A \cap \Omega = A$
$A \cup \Omega = \Omega$	$A \cap \varnothing = \varnothing$
$A \cup \complement A = \Omega$	$A \cap \complement A = \varnothing$
$\complement\complement A = A$	$\complement\Omega = \varnothing, \complement\varnothing = \Omega$
$\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$	$\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$

PS : toutes ces formules peuvent faire peur au premier abord, mais il n'est pas nécessaire d'apprendre tout par cœur, il faut surtout comprendre la logique

Ensembles particuliers

1. Ensembles finis et infinis

Un ensemble est dit "**fini**" s'il ne contient aucun élément *(∅)* ou s'il contient un nombre fini d'éléments *(ex : E = {1, 6, 9, 12})*.

Un ensemble est dit "**infini**" s'il contient un nombre infini d'éléments, pouvant être dénombrables *(ex : ℕ)* ou non dénombrables *(ex : ℝ)*.

2. Ensembles produits

Soient *A* et *B* deux ensembles quelconques.

L'**ensemble produit** de *A* et *B* (noté *A×B*) correspond à l'ensemble de tous les <u>couples ordonnés</u> *(a, b)* avec *a* ∈ *A* et *b* ∈ *B*.

Exemple : soient A = {x, y} et B = {1, 2}, on a A×B = {(x, 1), (x, 2), (y, 1), (y, 2)}

Le **nombre de couples** possibles se calcule en faisant le <u>produit des cardinaux</u> (rappel : cardinal = nombre d'éléments d'un ensemble) des différents ensembles mis en jeu.

Exemple : dans l'exemple précédent, on a Card(A) = 2 et Card(B) = 2, donc il existe 4 (2×2) couples possibles

La formule généralisée est la suivante : $Card(E_1 \times E_2 \times ... \times E_n) = \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} Card(E_i)$

3. Familles d'ensembles

Soit *A* un ensemble quelconque.

La **famille** des parties de *A*, notée *P*(*A*), correspond à l'ensemble de tous les sous-ensembles de *A*.

Exemple : soit A = {1, 2}, on a P(A) = {∅, {1}, {2}, {1, 2}}

Le **nombre de parties** de *E* se calcule via la formule : $\boxed{2^p \text{ avec } p = Card(E)}$

On appelle "**partition**" la subdivision de l'ensemble *A* en sous-ensembles disjoints dont la réunion forme *A*.

Exemple : en reprenant l'exemple précédent, on peut dire que les deux ensembles A_1 = {1} et A_2 = {2} forment une partition de l'ensemble A

Dénombrement

p-liste avec remise

Soit *E* un ensemble fini.

Une **p-liste avec remise** correspond à un p-uplet d'éléments de *E*, avec répétition possible : ce type de dénombrement intervient dans les tirages ordonnés **avec** remise

Pour illustrer, imaginez que vous ayez face à vous une urne contenant 3 boules de couleurs différentes (rouge, jaune et bleu). Il est possible de former un triplet (ou 3-uplet) en tirant successivement 3 boules lorsque, à chaque tirage, vous redéposez la boule que vous venez de tirer dans l'urne.

Exemples : (rouge, rouge, jaune), (bleu, jaune, bleu), (jaune, jaune, jaune)

Comme on effectue une remise, il est possible d'obtenir plusieurs fois une même couleur. De plus, comme on parle de tirage "ordonné", l'ordre est important : (rouge, bleu, jaune) ≠ (rouge, jaune, bleu)

Le **nombre de p-listes avec remise** se calcule via la formule : $\boxed{Card(E)^p}$

Exemple : dans l'exemple précédent, on a Card(E) = 3 et on cherche le nombre de 3-listes (p = 3), donc il existe 27 (3^3) 3-listes possibles.

Arrangement sans répétition

Un **arrangement <u>sans</u> répétition** (ou arrangement de *n* éléments pris *p* à *p*) correspond à un groupe de *p* éléments pris parmi *n* éléments selon un ordre bien déterminé : ce type de dénombrement intervient dans les <u>tirages ordonnés **sans** remise</u>

En reprenant l'exemple donné plus tôt, l'arrangement sans répétition se distingue de la p-liste avec remise <u>uniquement</u> par le fait que l'on ne redépose pas la boule dans l'urne après un tirage : il n'est donc pas possible d'obtenir plusieurs fois la même boule dans un arrangement sans répétition

Exemple : (rouge, bleu) est un arrangement de 2 éléments parmi 3 éléments

Le **nombre de ces arrangements** se calcule via la formule : $\boxed{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}}$

Exemple : on a n = 3, on s'intéresse au nombre d'arrangements de 2 éléments (p = 2) et on trouve donc un résultat égal à 6 (3!/1!)

Aparté sur la factorielle

La factorielle d'un entier naturel *n* (notée *n!*) correspond au produit des entiers compris entre 1 et *n* : *n! = 1 × 2 × … × n*

Exemple : 5! = 1 × 2 × 3 × 4 × 5 = 120

Il est important de noter que, par convention, on considère que *0! = 1.*

Arrangement avec répétition

Si vous avez bien suivi la partie précédente, vous devez être capable de dire qu'un **arrangement <u>avec</u> répétition** est strictement identique à une **p-liste avec remise** : ce type de dénombrement intervient donc également dans les <u>tirages ordonnés **sans** remise</u>

Exemple : (jaune, jaune) est un arrangement de 2 éléments parmi 3 éléments

Le **nombre de ces arrangements** se calcule via la formule : $\boxed{n^p}$

PS : tout ce que vous devez retenir dans cette partie c'est que arrangement avec répétition = p-liste avec remise

Permutation sans répétition

Une **permutation sans répétition** (ou permutation d'un ensemble fini à *n* éléments) correspond à un **arrangement sans répétition** avec comme particularité que $p = n$: ce type de dénombrement intervient donc dans les tirages ordonnés **sans** remise

Exemple : à partir de l'exemple précédent, on peut dire que (rouge, bleu, jaune) est une permutation d'un ensemble fini à 3 éléments

Le **nombre de ces permutations** se calcule via la formule : $\boxed{n!}$

Exemple : on a n = 3 donc le nombre de permutations vaut 6 (3!)

Permutation avec répétition

Une **permutation avec répétition** est utilisée lorsque, au sein d'un ensemble de *n* éléments, on distingue plusieurs catégories (k_1, k_2, …, k_x) et que l'on ne considère que la catégorie pour l'ordre (autrement dit on considère que tous les éléments d'une même catégorie sont identiques).

Exemple : un étudiant possède 10 livres (2 de physio, 3 de biostats, 5 de biochimie) et se demande comment les ranger en considérant uniquement la matière comme critère distinctif

Le **nombre de ces permutations** se calcule via la formule : $\boxed{\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_x!}}$

Exemple : on a $n = 10$, $k_1 = 2$, $k_2 = 3$ et $k_3 = 5$ donc le nombre de permutations avec répétition vaut 2520 (10!/(2! × 3! × 5!))

Combinaison

Une **combinaison** de *n* éléments pris *p* à *p* (ou partie d'un ensemble) correspond à une partie à *p* éléments d'un ensemble à *n* éléments, sans considération d'ordre ou de répétition : ce type de dénombrement intervient dans les tirages **non** ordonnés **sans** remise

Exemple : on tire simultanément 2 boules dans notre urne de 3 boules.

Le **nombre de combinaisons** se calcule via la formule : $\boxed{C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}}$

Exemple : on a n = 3 et p = 2, donc le nombre de combinaisons à 2 éléments vaut 3 (3!/(2! × 1!))

Eléments de probabilité

Définitions

Il existe 2 types de phénomènes :

- **Phénomène déterministe** : phénomène dont on peut prévoir l'issue, notamment via des lois physiques *(ex : lois de Newton, de Mariotte, d'Ohm)*
- **Phénomène aléatoire** : phénomène dont on ne peut pas prévoir l'issue, qui repose donc sur le hasard *(ex : pile ou face, lancer de dé)*

Une **expérience aléatoire** (ou épreuve) correspond à une expérience dont le résultat n'est pas prévisible : c'est donc un phénomène aléatoire

En probabilités, on travaille dans un ensemble dit "**fondamental**" (noté Ω) et qui correspond à l'ensemble des issues possibles, chaque issue représentant alors un sous-ensemble de cet ensemble fondamental.

Exemple : pour un lancer de dé, l'ensemble fondamental est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ tandis que $A = \{3\}$ et $B = \{6\}$ sont des exemples d'issues possibles

Il existe 3 types d'événements particuliers :

- **Evénement élémentaire** : événement vérifié par une unique issue *(ex : obtenir un 3)*
- **Evénement impossible** : événement irréalisable *(ex : obtenir un 7)*
- **Evénement certain** : événement vérifié par chaque issue *(ex : obtenir un chiffre compris entre 1 et 6)*

Probabilité

La **probabilité** (notée P) est une fonction qui, en associant à un événement un nombre compris entre 0 et 1, permet de mesurer ses chances de réalisation.

D'après le **théorème des probabilités totales**, la probabilité d'union de 2 événements A et B se calcule via la formule : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Lorsque 2 événements sont incompatibles ($P(A \cap B) = 0$), la probabilité d'union est égale à la somme des probabilités individuelles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Quelques propriétés

$P(\varnothing) = 0$; $P(\Omega) = 1$; $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$; $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

La **formule de Poincaré** donne la relation : $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{(k-1)}\left(\sum_{1\leq i_1\leq\ldots\leq i_k\leq n} P(A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k})\right)$

PS : on parle également de "propriété d'additivité forte", de "formule de crible" ou de "formule d'inclusion-exclusion"

Pour ***n = 2***, on retrouve la formule des probabilité totales (cf. page précédente)

Pour ***n = 3***, on a la formule suivante :

$$P(A\cup B\cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - [P(A\cap B) + P(A\cap C) + P(B\cap C)] + P(A\cap B\cap C)$$

Equiprobabilité

Lors d'une situation d'**équiprobabilité**, chaque événement élémentaire possède la même probabilité de réalisation, qui vaut alors *1 / Card(Ω).*

Exemple : lors d'un pile ou face, on a 2 issues possibles (Card(Ω) = 2) qui possèdent chacune 1 chance sur 2 (1/2) de se réaliser

La **probabilité** d'un événement *A* se calcule via la formule : $\boxed{P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}}$

PS : Card(A) désigne le nombre de cas favorables et Card(Ω) correspond au nombre de cas possibles

Exemple : dans un jeu de 52 cartes (Card(Ω) = 52), la probabilité de tirer un trèfle (Card(A) = 13) vaut 1/4 (13/52)

Probabilité sur un ensemble

1. Ensemble fini

Dans un **ensemble fini**, la probabilité d'un événement est comprise entre 0 et 1 tandis que la somme des probabilités de tous les événements vaut 1.

Exemple de situation

Soit un dé biaisé tel que :

i	1	2	3	4	5	6
p_i	1/3	1/6	1/12	1/12	1/4	?

Comme on sait que la somme des probabilités de tous les événements vaut 1, on est capable de dire que la probabilité d'obtenir un 6 est égale à 1/12 (1 - (1/3 + 1/6 + 1/12 + 1/12 + 1/4).

2. Ensemble infini dénombrable

Dans un **ensemble infini dénombrable** $E = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$, on affecte à chaque élément a_i une probabilité p_i telle que : $p_i \geq 0$ et $\Sigma\, p_i = 1$

La probabilité d'un événement quelconque est égale à la somme des p_i correspondant à ses éléments.

Exemple de situation

Soit l'expérience consistant à jeter une pièce et à compter le nombre de jets jusqu'à obtenir le résultat "pile".

Il est possible de construire un espace probabilisé en choisissant :

$$p_1 = 1/2 \;\; ; \;\; p_2 = 1/4 \;\; ; \;\; \dots \;\; ; \;\; p_n = 1/2^n \;\; ; \;\; p_\infty = 0$$

Le choix des p_i est assez <u>arbitraire</u> puisque on le fixe a priori en formulant des hypothèses (ici on suppose que p(pile) = p(face) = 1/2 et que chaque lancer est totalement indépendant)

FIN