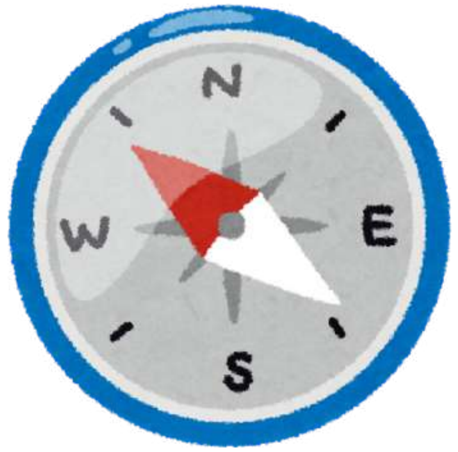
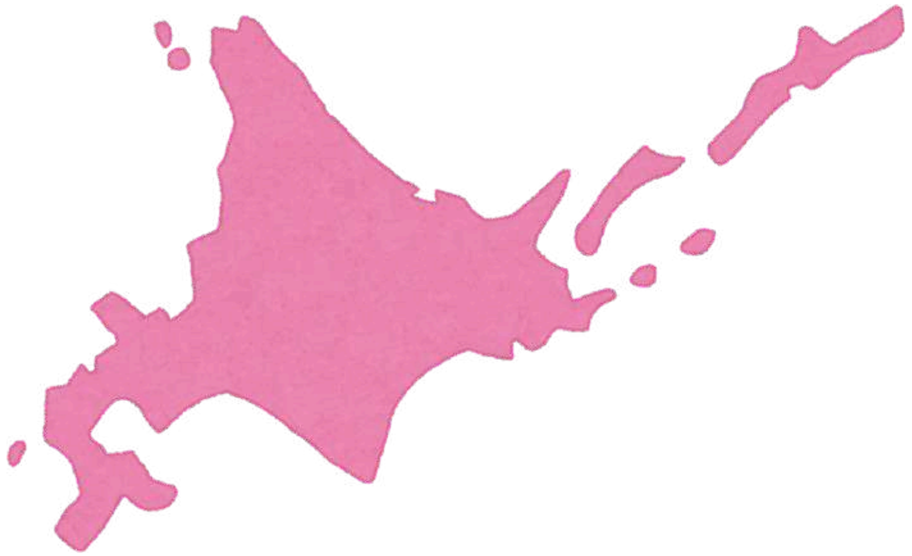
Matrices





Définition

Matrice *M(n,p)* : tableau de nombres composé de *n* lignes et *p* colonnes

<u>*Ex*</u> : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ est une matrice composée de 2 lignes et 3 colonnes

On distingue 2 cas :

- ***p = 1*** : la matrice est univariée
- ***p ≥ 2*** : la matrice est multivariée

<u>*Ex*</u> : $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$

<u>*Ex*</u> : $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$

Matrices particulières

Matrice carrée (d'ordre n) : n = nombre de lignes = nombre de colonnes

<u>*Ex*</u> : $D = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$ *est carrée d'ordre 2*

Matrice identité (d'ordre n) : matrice carrée d'ordre n dont les coefficients diagonaux valent 1 et les autres valent 0

<u>*Ex*</u> : $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice identité d'ordre 2

Opérations (1)

Transposée $^{T}M(p,n)$: permutation du rôle des lignes et des colonnes

$$\underline{Ex} : E = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow {}^{T}E = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$$

On distingue 2 cas particuliers :

- **$^{T}M = M$** : la matrice est symétrique
- **$^{T}M = -M$** : la matrice est antisymétrique

$$\underline{Ex} : F = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\underline{Ex} : G = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Entraînement

Soit H la matrice définie par : $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

MQNPGJ

Consignes :

- Indiquer le nombre de lignes et de colonnes de la transposée de H
- Déterminer la transposée de H

Bonus : en déduire le type de symétrie de H

Réponses

Nombre de lignes et de colonnes de ^{T}H : 3 lignes et 2 colonnes

Détermination de ^{T}H : $^{T}H = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

Symétrie de H : ni symétrique, ni antisymétrique

Opérations (2)

Déterminant *det(M)* : valeur particulière utile pour déterminer l'inversibilité

On s'intéresse à 2 cas :

- **Ordre 2** : $det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$

<u>*Ex*</u> : $det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = 2 \times 5 - 0 \times 4 = 10$

- **Ordre 3** : $det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = a \times det\begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - b \times det\begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix} + c \times det\begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix}$

Entraînement

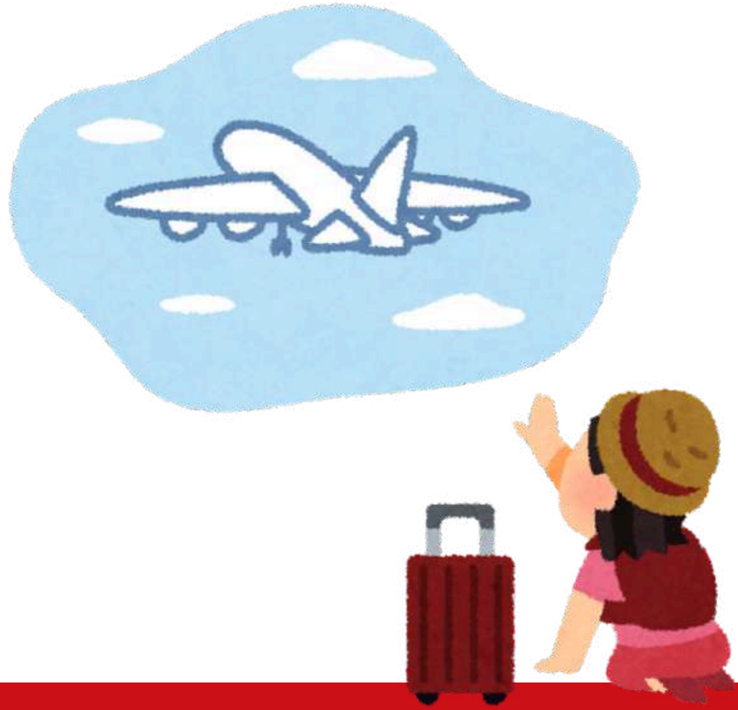
Soit J la matrice définie par : $J = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 4 & 8 & 5 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

EYEQSI

Consignes :

- Donner une formule du déterminant de J
- Calculer le déterminant de J

Bonus : en déduire l'inversibilité de J



Réponses

Formule de *det(J)* : $det\left(J\right)=-4\times det\begin{pmatrix}7 & 2\\ 6 & 3\end{pmatrix}+8\times det\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}-5\times det\begin{pmatrix}3 & 7\\ 2 & 6\end{pmatrix}$

Calcul de *det(J)* : $det\left(J\right)=-16$

Inversibilité de *J* : inversible

Opérations (3)

Inverse M^{-1} : matrice vérifiant la relation $M \times M^{-1} = I$

Conditions : M carrée et $det(M) \neq 0$

Ordre 2 : $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow M^{-1} = \dfrac{1}{det\,(M)} \times \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

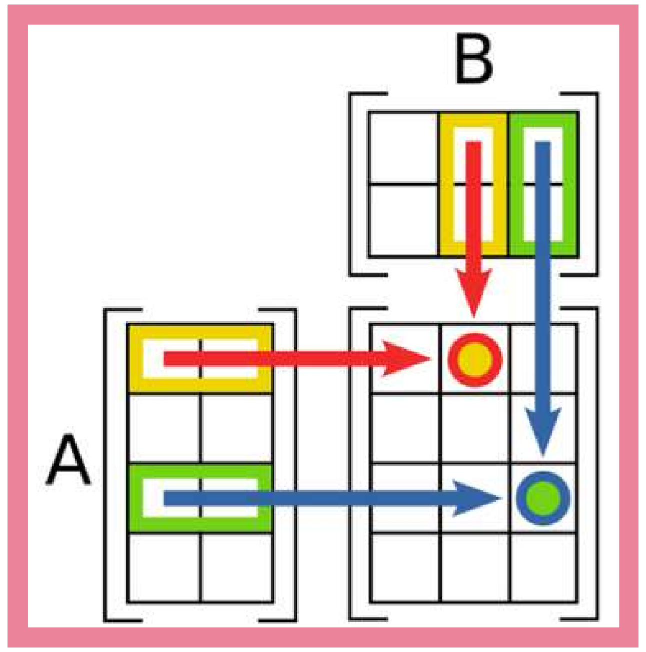
<u>*Ex*</u> : $K = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow K^{-1} = \dfrac{1}{48} \times \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/16 & -5/48 \\ -1/16 & 7/48 \end{pmatrix}$

Opérations (4.1)

Produit *M×N* : multiplication de 2 matrices entre elles (ici *M* et *N*)

Condition : nombre de colonnes de *M* = nombre de lignes de *N*

Méthode :



<u>*Ex*</u> : $L = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$ et $O = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$L \times O = \begin{pmatrix} 3 \times 12 + 6 \times 5 \\ 1 \times 12 + 7 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66 \\ 47 \end{pmatrix}$$

Opérations (4.2)

Remarques :

- $M \times N$ n'est pas toujours égal à $N \times M$, mais si c'est le cas on dit que les matrices M et N commutent
- Le produit $M(n,p) \times N(p,m)$ donne un résultat de la forme $R(n,m)$
- Le produit ${}^{T}M \times M$ donne toujours une matrice carrée d'ordre p symétrique

Entraînement

Soient *P* et *Q* les matrices définies par : $P = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Consignes :

- Justifier l'existence du produit *P*×*Q*
- Calculer le produit *P*×*Q*

EDLBQD

Bonus : indiquer si P et Q commutent

Réponses

Existence de *P×Q* : nombre de colonnes de *P* = nombre de lignes de Q

Calcul de *P×Q* : $P \times Q = \begin{pmatrix} 4 & 59 \\ 1 & 16 \end{pmatrix}$

Commutativité de *P* et *Q* : non-commutantes car $Q \times P = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 19 \\ 3 & 0 & 9 \\ 4 & 0 & 12 \end{pmatrix}$

Opérations (5)

Puissance M^n : multiplication d'une matrice par elle-même (n-fois)

Condition : M carrée

Matrice nilpotente (d'ordre n) : matrice carrée qui vérifie $M^n = 0$ et $M^{n-1} \neq 0$

<u>*Ex*</u> : $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente d'ordre 3 car $S^3 = 0$ et $S^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Analyse factorielle (1)

Définition : ensemble de techniques dont le but est de résumer avec une perte minimale et contrôlée (++) les informations contenues dans de gros tableaux de données

On distingue 2 techniques principales :

- **ACP** : technique plus ancienne (1933) ; variables quantitatives
- **AFC** : technique plus récente (1970s) ; variables qualitatives

Analyse factorielle (2)

Intérêt (++) : extraction d'un maximum d'informations sous une forme simple et cohérente à partir d'une importante quantité de données (description synthétique)

L'ACP permet de mettre en évidence 2 éléments :

- **Redondance** : interrelations entre variables
- **Profils** : ressemblances / oppositions entre individus

Analyse factorielle (3)

On distingue 2 situations :

- **Données homogènes** : il faut centrer les données
- **Données hétérogènes** : il faut centrer-réduire les données

Définitions : centrer = moyenne à 0 ; réduire = écart-type à 1

Objectif : gommer les effets de taille pour aboutir à une ACP normée

Fin


REMETTRE
LA FRANCE
EN ORDRE
Rassemblement National