Calcul matriciel

Salut à tous et bienvenue dans ce diapo Bonus : le thème auquel nous allons nous attaquer ici est le fameux ✨ calcul matriciel ✨

Si vous êtes là, il est possible que ce soit parce que vous avez rencontré quelques difficultés au niveau de ma fiche sur les matrices.

Il se peut également que vous n'ayez pas eu le moindre problème particulier avec cette dernière, mais que vous êtes tout simplement curieux.

Quelle que soit votre situation, ce diapo Bonus vous sera forcément utile pour acquérir une meilleure maîtrise du calcul matriciel (donc ça vous servira !!).

Sur ce, profitez bien des quelques explications qui vont suivre !

Nous nous focaliserons sur 2 notions en particulier :

I - Déterminant

II - Produit

De manière générale, ce sont les 2 points sur lesquels vous êtes le plus susceptible de faire des petites gaffes de calcul qui pourront vous coûter un ou plusieurs QRUs.

Pour éviter toute erreur le jour J, nous allons ici procéder étape par étape afin que tout soit le plus clair possible.

I - Déterminant

Pour un ordre 2 :

$$det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Ici, il suffit d'observer que l'on croise les valeurs : on multiplie le nombre en haut à gauche par celui en bas à droite *(a×d)*, puis on soustrait *(-)* le produit du nombre en haut à droite et de celui en bas à gauche *(b×c)*

$$det\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 3 \times 4 - 6 \times 2 = 12 - 12 = 0$$

Pour un ordre 3 :

$$det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = a \times det\begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - b \times det\begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix} + c \times det\begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix}$$

Nous remarquons que les valeurs de la 1ère ligne sont prises comme coefficients, avec une alternance +/-.

PS : on a donc +a, puis -b et enfin +c

De plus, nous voyons que, selon le coefficient, nous avons une matrice 2×2 particulière, mais il n’est pas utile d’apprendre par cœur quelle matrice correspond à quel coefficient, il y a en fait une logique !

Pour chaque coefficient, nous allons barrer sa ligne et sa colonne, les 4 valeurs restantes formant alors la matrice associée.

$$det\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = 3 \times det\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \dots$$

$$det\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = 3 \times det\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - 6 \times det\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \dots$$

$$det\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = 3 \times det\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - 6 \times det\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + 9 \times det\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

PS : n'oubliez pas le signe (-) devant le coefficient b

Maintenant que vous êtes devenus de vrais pros vis-à-vis des matrices 2×2 et 3×3, passons à un petit entraînement !!

Soit A la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 5 & 3 & -7 \\ 8 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Calculez le déterminant de A

La réponse et la correction sont données à la diapo suivante.

Réponse

$$det\,(A) = -6$$

Correction

$$\begin{aligned} det\begin{pmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 5 & 3 & -7 \\ 8 & 1 & -3 \end{pmatrix} &= 6 \times det\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} + 2 \times det\begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 8 & -3 \end{pmatrix} + 4 \times det\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 6 \times (-9 + 7) + 2 \times (-15 + 56) + 4 \times (5 - 24) \\ &= 6 \times (-2) + 2 \times 41 + 4 \times (-19) \\ &= -12 + 82 - 76 \\ &= -6 \end{aligned}$$

PS : comme b = -2, nous obtenons bien un '+2'

II - Produit

Concernant le produit de matrices, je vous rappelle qu'il existe une condition à **TOUJOURS** vérifier pour être capable de le calculer.

Soient A et B deux matrices : le produit $A \times B$ existe **si et seulement si** le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

Ainsi, le produit $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ existe...

Mais, le produit $\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ n'existe pas...

Un autre point important à retenir (ça tombe ++) concerne plutôt la forme du résultat du produit de 2 matrices.

Soient $A(n,p)$ et $B(p,m)$ deux matrices : la matrice issue du produit $A \times B$ est **TOUJOURS** de la forme $C(n,m)$.

PS : gardez bien ce point à l'esprit

Ainsi, le produit $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ donne une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Détail : on a $A(2,2)$ et $B(2,1)$ donc le produit donne $C(2,1)$

Passons maintenant au vif du sujet : le calcul de produits !

Lorsque le produit $A \times B$ existe, il est assez intéressant de “découper” nos matrices de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

En gros, nous nous intéressons d’une part au(x) ligne(s) de la matrice A et d’autre part au(x) colonne(s) de la matrice B.

PS : cela vous aidera à mieux visualiser les étapes du calcul

Une fois ce découpage effectué, nous pouvons mettre en place notre matrice-résultat en tenant compte des dimensions de *A* et *B*.

Comme nous l'avons vu, le résultat de $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ est de la forme $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Pour trouver les valeurs de *a* et *b*, nous allons reprendre le découpage réalisé à la diapo précédente et effectuer les calculs suivants :

$$\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a = 7 \times 6 + 5 \times 9 \\ b = 4 \times 6 + 3 \times 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a = 87 \\ b = 51 \end{pmatrix}$$

Si vous avez bien compris le procédé, nous pouvons dire que :

- La valeur de *a* est trouvée en multipliant la 1ère valeur de la 1ère ligne de *A* par la 1ère valeur de la colonne de *B*, puis en ajoutant le produit de la 2ème valeur de la 1ère ligne de *A* et de la 2ème valeur de la colonne de *B*

- La valeur de *b* est trouvée en multipliant la 1ère valeur de la 2ème ligne de *A* par la 1ère valeur de la colonne de *B*, puis en ajoutant le produit de la 2ème valeur de la 2ème ligne de *A* et de la 2ème valeur de la colonne de *B*

PS : j'ai conscience que ce texte est très lourd, mais il décrit concrètement le calcul effectué au niveau de la diapo précédente

Intéressons-nous au produit suivant :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$$

Pour mieux visualiser tout ce bazar, vous pouvez disposer les matrices de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$$

A chaque fois qu'une ligne et qu'une colonne se croisent, vous pouvez ajouter un point de couleur au niveau de la matrice-résultat.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

En faisant ce travail de “coloriage”, il vous sera plus facile de comprendre quelle valeur doit être multipliée par quelle valeur.

PS : si vous visualisez déjà sans tout ça, ne vous embêtez pas à le faire

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a = 3 \times 6 + 2 \times 9 & b = 3 \times 4 + 2 \times 5 \\ c = 7 \times 6 + 8 \times 9 & d = 7 \times 4 + 8 \times 5 \end{pmatrix}$$

Afin de vérifier que tout est bien clair dans vos big brains, nous allons passer au TEST FINAL (comme FINAL Fantasy ou quoi) de ce diapo Bonus !!

Soient A et B les matrices définies par : $A = \begin{pmatrix} 12 & 9 & 3 \\ 0 & 4 & 15 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 8 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$

Calculez, s'ils existent, les produits $A \times B$ et $B \times A$

La réponse et la correction sont données à la diapo suivante.

Réponse

$$A \times B = \begin{pmatrix} 144 & 123 \\ 155 & 47 \end{pmatrix}$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} 72 & 70 & 78 \\ 60 & 77 & 135 \\ 108 & 85 & 42 \end{pmatrix}$$

Correction

Etape 1 : nous vérifions l'existence des produits

Pour le produit $A \times B$, le nombre de colonnes de A (3) est bien égal au nombre de lignes de B (3), ce produit existe et donne un résultat de la forme $C(2,2)$.

Pour le produit $B \times A$, le nombre de colonnes de B (2) est bien égal au nombre de lignes de A (2), ce produit existe et donne un résultat de la forme $C(3,3)$.

Etape 2.1 : nous procédons au calcul du produit *A×B*

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 8 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 12 & 9 & 3 \\ 0 & 4 & 15 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} a = 12 \times 6 + 9 \times 5 + 3 \times 9 & b = 12 \times 4 + 9 \times 8 + 3 \times 1 \\ c = 0 \times 6 + 4 \times 5 + 15 \times 9 & d = 0 \times 4 + 4 \times 8 + 15 \times 1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} a = 72 + 45 + 27 & b = 48 + 72 + 3 \\ c = 0 + 20 + 135 & d = 0 + 32 + 15 \end{pmatrix}$$

$$\leftarrow$$

$$\begin{pmatrix} a = 144 & b = 123 \\ c = 155 & d = 47 \end{pmatrix}$$

<u>Etape 2.2</u> : nous procédons au calcul du produit *B×A*

$$\begin{pmatrix} 12 & 9 & 3 \\ 0 & 4 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 8 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} a = 6 \times 12 + 4 \times 0 & b = 6 \times 9 + 4 \times 4 & c = 6 \times 3 + 4 \times 15 \\ d = 5 \times 12 + 8 \times 0 & e = 5 \times 9 + 8 \times 4 & f = 5 \times 3 + 8 \times 15 \\ g = 9 \times 12 + 1 \times 0 & h = 9 \times 9 + 1 \times 4 & i = 9 \times 3 + 1 \times 15 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} a = 72 + 0 & b = 54 + 16 & c = 18 + 60 \\ b = 60 + 0 & e = 45 + 32 & f = 15 + 120 \\ g = 108 + 0 & h = 81 + 4 & i = 27 + 15 \end{pmatrix}$$

$$\leftarrow$$

$$\begin{pmatrix} a = 72 & b = 70 & c = 78 \\ b = 60 & e = 77 & f = 135 \\ g = 108 & h = 85 & i = 42 \end{pmatrix}$$

<u>Etape 3</u> : vous pouvez vous féliciter, c'est la fin de ce diapo Bonus !!

Si vous avez su réaliser tous les calculs que je vous ai proposés, alors c'est que vous êtes parfaitement prêts pour affronter les QRUs sur le calcul matriciel qui pourraient tomber à l'examen.

PS : même si je n'en ai pas parlé ici, vous devez également être capables d'inverser une matrice carrée d'ordre 2

Si toutefois vous n'avez pas systématiquement trouvé les bonnes réponses ou si vous avez encore des doutes vis-à-vis de votre niveau, n'hésitez pas à vous entraîner : prenez des matrices randoms, calculez leur produit (s'il existe) et comparez votre résultat avec celui de la calculatrice.

En parlant de calculatrice, je vous rappelle (même si vous le savez sûrement déjà) que cette dernière n'est pas autorisée le jour de l'examen (logique).

C'est pourquoi il est nécessaire que vous soyez suffisamment à l'aise en calcul mental pour éviter de perdre du temps le jour J.

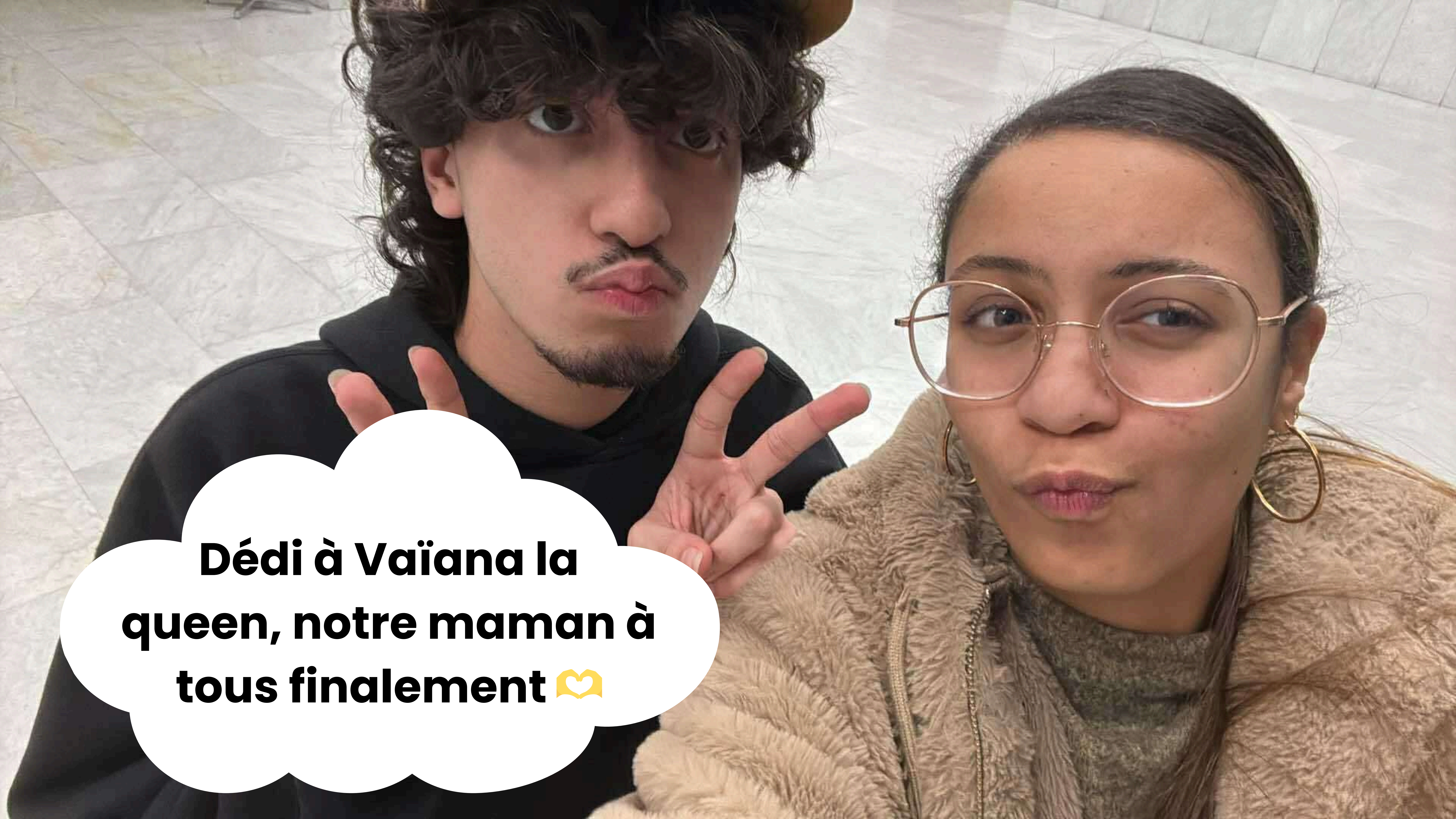
Même si les calculs restent simples (on parle d'additions et de multiplications ici), prendre trop de temps à les faire pour ensuite se rendre compte d'une erreur bête, ça peut vous faire stresser pour tout le reste de l'épreuve.

Donc, si vous en sentez le besoin, entraînez-vous là-dessus ! Cela vous sera utile pour les matrices, les autres cours de biostatistiques et même pour d'autres matières !!

Breeef… Trêve de mondanités, ce diapo Bonus est (vraiment) terminé (promis).

Pensez à y jeter un nouveau coup d'œil plus tard dans le semestre, il peut toujours vous permettre de revérifier rapidement vos talents de calculateurs de matrices en amont de l'examen.

Si ce format vous a plu, dites-moi si vous en voulez d'autres sur le cours de matrices ou même sur un autre de mes cours de l'année (probas élémentaires, probas conditionnelles, épidémiologie descriptive), j'essaierai de m'y intéresser !


Dédi à Vaïana la queen, notre maman à tous finalement 🫶