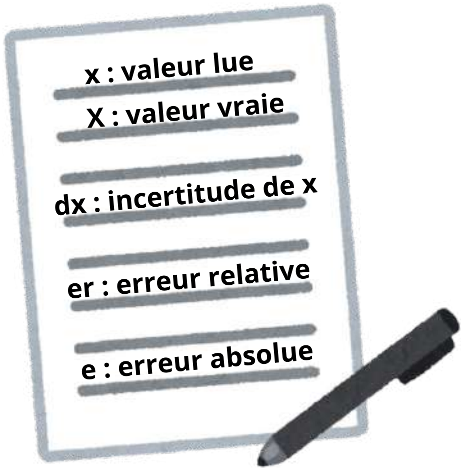
INTRODUCTION À LA MÉTROLOGIE

COURS 1

Incertitude :

$$x - dx < X < x + dx$$

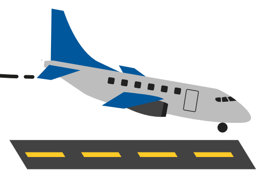


Erreur absolue :

$$e = |x - X|$$

Erreur relative :

$$er = \frac{e}{X}$$



PROBABILITÉS ÉLÉMENTAIRES

COURS 2

Ensembles produits :

$$Card(E_1 \times E_2 \times ... \times E_n) = \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} Card(E_i)$$

Parties d'un ensemble :

$$2^p \text{ avec } p = Card(E)$$

p-listes avec remise :

$$Card(E)^p$$

Arrangements :

Sans répétition :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Avec répétition :

$$n^p$$

Permutations :

Sans répétition :

$$n!$$

Avec répétition :

$$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot ... \cdot k_x!}$$

Combinaison :

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Formule de Poincaré :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{(k-1)} \left(\sum_{1 \leq i_1 \leq ... \leq i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k}) \right)$$

Equiprobabilité :

$$P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$$

STATISTIQUES DESCRIPTIVES

COURS 3

Moyenne :

$$m = \frac{\sum termes}{n}$$

Médiane : série paire

Moyenne des valeurs de rang : :

$$\frac{n}{2} et \frac{n}{2} + 1$$

Médiane : série impaire

$$\frac{(n+1)}{2}$$ position ++

Quartile : ex pour le 1 er

$$(0,25 \times n)$$ position ++

Intervalle de confiance :

$$\mu \in \left[m \pm \frac{\varepsilon s}{\sqrt{n}} \right]$$

IC - données qualitatives :

$$p \in [p_{obs} - \varepsilon s ; p_{obs} + \varepsilon s]$$

$$s = \sqrt{\frac{p_0 \times q_0}{n}} \quad q_0 = 1 - p_0$$

A connaître :

si $\alpha = 5\%$

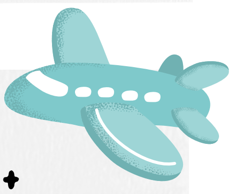
alors $\varepsilon = 1,96$

A connaître :

si $\alpha = 1\%$

alors $\varepsilon = 2,6$

IC Loi de Gauss :



[m - 1 s ; m + 1s] contient 68,2% de la population ++

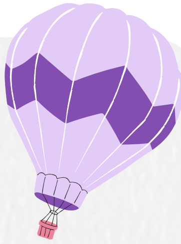
[m - 1,96 s ; m + 1,96s] contient 95,4% de la population ++

[m - 2,6 s ; m + 2,6s] contient 99,6% de la population ++

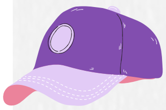
VARIABLES ALÉATOIRES

COURS 4

Théorèmes de l'espérance

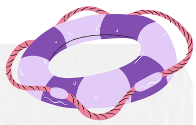


$$\begin{bmatrix} E(kX) = kE(X) \\ E(k+X) = E(X) + k \end{bmatrix}$$



$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

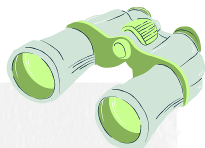
Propriétés de la variance



$$\begin{bmatrix} Var(aX) = a^2 Var(X) \\ Var(a+X) = Var(X) \end{bmatrix}$$

Lois de probabilité discrète

Loi de Bernoulli $\mathcal{B}$ (p)



$$P(X=k) = p^k (1-p)^{1-k} = p^k q^{1-k}$$ pour $k \in \{0,1\}$

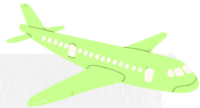
Moyenne $\mu = p$

Variance $\sigma^2 = p(1-p) = pq$

VARIABLES ALÉATOIRES

COURS 4

Loi binomiale $\mathcal{B}$ (n ; p)



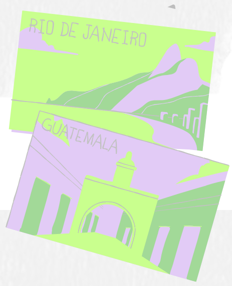
$$P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k}$$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$

Moyenne $\mu = np$ **Variance** $\sigma^2 = np(1-p) = npq$

Loi géométrique $\mathcal{G}$ (p)

$$P(X=k) = p(1-p)^{k-1} = pq^{k-1}$$ pour $k \in \mathbb{N}^*$

Moyenne $\mu = 1/p$ **Variance** $\sigma^2 = \frac{1-p}{p^2}$



Loi hypergéométrique $\mathcal{H}$ (N ; D ; n)

$$P(X=k) = \frac{C_D^k \times C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}$$ avec $min(0; n-D) \leqslant k \leqslant max(n; D)$

Moyenne $\mu = \frac{nD}{N} = np$ **Variance** $\sigma^2 = \left(\frac{N-n}{N-1}\right) npq$

Loi de Poisson $\mathcal{P}$ (λ)

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$ avec

$\lambda > 0$
$k \in \mathbb{N}$
$e = 2,71828\ldots$

Moyenne et variance $\mu = \sigma^2 = \lambda$

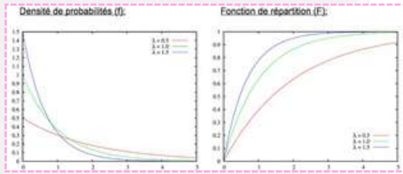
VARIABLES ALÉATOIRES

COURS 4

Lois de probabilité continue

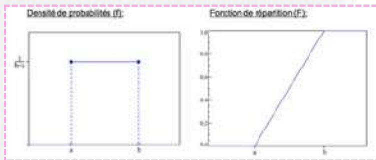
Loi exponentielle

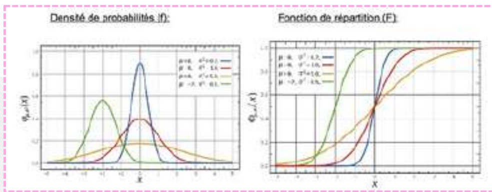
Moyenne $\mu = 1/\lambda$ Variance $\sigma^2 = 1/\lambda^2$



Loi uniforme

Moyenne $\mu = (a + b)/2$ Variance $\sigma^2 = (b - a)^2/12$





Loi normale

- Il y a 10 chances sur 100 pour que $X < \mu - 1{,}65\sigma$ ou $X > \mu + 1{,}65\sigma$
- Il y a 5 chances sur 100 pour que $X < \mu - 1{,}96\sigma$ ou $X > \mu + 1{,}96\sigma$
- Il y a 1 chance sur 100 pour que $X < \mu - 2{,}58\sigma$ ou $X > \mu + 2{,}58\sigma$
- Il y a 1 chance sur 1000 pour que $X < \mu - 3{,}30\sigma$ ou $X > \mu + 3{,}30\sigma$

Loi normale centrée réduite

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

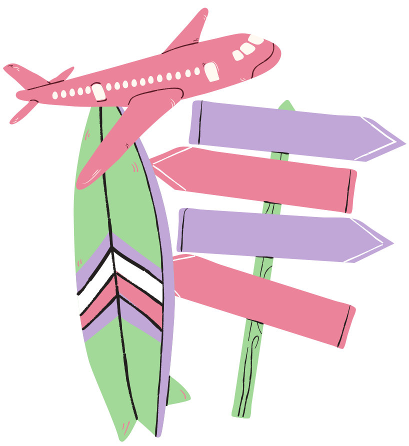
Moyenne $\mu = 0$ Ecart-type $\sigma = 1$

VARIABLES ALÉATOIRES

COURS 4

Approximations

Lois	Conditions	Conséquences
Binomiale → Poisson	Si : → $n > 50$ → $p \leqslant 0{,}10$ → $np < 5$	$B\ (n;p) \rightarrow P\ (\lambda = np)$
Binomiale → Normale	Si : → $np \geqslant 5$ → $nq \geqslant 5$	$B\ (n;p) \rightarrow N\ (np;\ \sqrt{npq})$
Poisson → Normale	Si : → $\lambda > 25$	$P\ (\lambda) \rightarrow N\ (\lambda;\sqrt{\lambda})$



TESTS DIAGNOSTIQUES

COURS 5

Sensibilité :

$$Se = P_M(T+) = \frac{VP}{VP + FN}$$

Spécificité :

$$Sp = P_{NM}(T-) = \frac{VN}{VN + FP}$$

Exactitude :

$$e = \frac{VP + VN}{total}$$

Prévalence :

$$p = \frac{VP + FN}{total}$$

Valeur prédictive + :

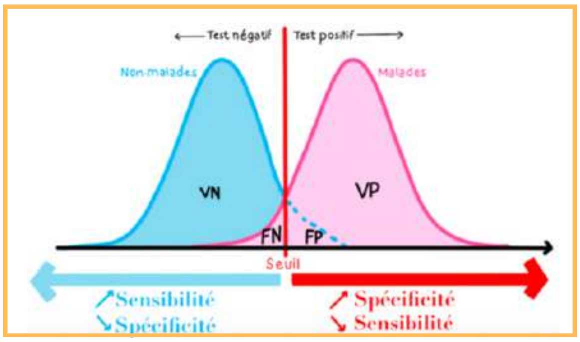
$$VPP = \frac{VP}{VP + FP}$$

Valeur prédictive - :

$$VPN = \frac{VN}{VN + FN}$$

Indice de Youden :

$$J = Se + Sp - 1$$



Vraisemblance positive :

$$LR+ = \frac{Se}{(1 - Sp)}$$

Vraisemblance négative :

$$LR- = \frac{(1 - Se)}{Sp}$$

ESSAIS CLINIQUES

COURS 6

Différence de risque :

$$DR = R1 - R0$$

Risque Relatif :

$$RR = \frac{r1}{r0}$$

Number Needed to Treat

$$NNT = \frac{1}{DR} = \frac{1}{|r1 - r0|}$$

Réduction de RR

$$RRR = 1 - RR$$

Risque du ttt étudié

$$r1 = \frac{x1}{n1}$$

Risque du ttt de contrôle

$$r0 = \frac{x0}{n0}$$

Nombre de patient :

α est le risque de 1ère **espèce** et β est le risque de **2ème espèce** → S'ils augmentent, le nombre de sujets **diminue**.

$$n = \frac{2\sigma^2}{\delta^2}\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}} + z_{1-\beta}\right)^2$$

δ est la **différence minimale** cliniquement pertinente : si elle augmente, le nombre de sujets **diminue**.

σ^2 est la **variance,** soit la **variabilité du critère** de jugement : s'il **augmente**, le nombre de sujets **augmente**.

MATRICES

COURS 7

Identité :

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Transposée :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow {}^{T}M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Symétrie :

Matrice symétrique :

$${}^{T}M = M$$

Matrice antisymétrique :

$${}^{T}M = -M$$

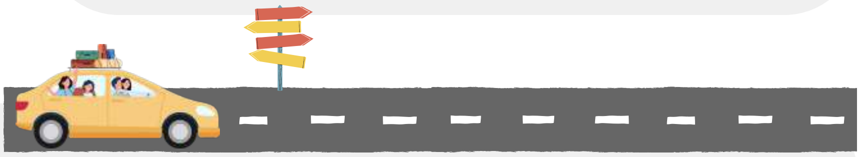
Déterminants :

Ordre 2 :

$$det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Ordre 3 :

$$det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = a \times det \begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - b \times det \begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix} + c \times det \begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix}$$



Inverse :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow M^{-1} = \frac{1}{det\,(M)} \times \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Combinaison linéaire :

$$F_i = A_1 \times X_1 + \ldots + A_p \times X_p$$

avec A = coeff et X = variable

Part d'explication :

$$\mu_i\% = \frac{\mu_i}{\sum \mu_i} \times 100$$

STATISTIQUES DÉDUCTIVES

COURS 8

Risque de première espèce : α

Probabilité de rejeter H0 si H0 est vraie

Maitrisé et fixé à l'avance

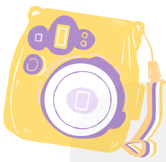
En général 5%

Risque de seconde espèce : β

Probabilité d'accepter H0 si H0 est fausse

Négligé et fixé à postériori

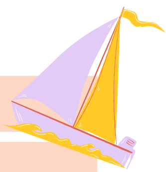
En général 20%



Puissance d'un test : $1 - \beta$

Probabilité de rejeter H0 avec H1 vraie

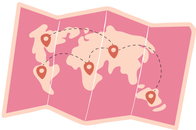
Réalité \ Décision	Rejet H0	Non rejet H0
H0 vraie	α	$1 - \alpha$
H1 vraie	$1 - \beta$	β



Si :	Z calculé > Z théorique	
Alors :	Rejet H0	Acceptation H0
Pour :	Comparaison de pourcentages	Test U de Mann & Whitney
	Test du khi2	
	Comparaison de moyennes	
	Test T de Student	Test r' de Spearman
	Test du coefficient de corrélation (Pearson)	

STATISTIQUES DÉDUCTIVES

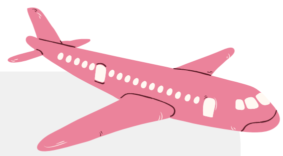
COURS 8



Effectif \ Variables	Données quantitatives	Données qualitatives	Données qualitatives et quantitatives
$4 < n < 12$	r' de Spearman	Comp % ou x2	U de Mann & Whitney
$12 \leqslant n < 30$	Coeff de corrélation r	Comp % ou x2	T de Student
$n \geqslant 30$	Coeff de corrélation r	Comp % ou x2	Comp moyennes

On peut utiliser un test pour des effectifs <u>supérieurs</u> à ceux prévus initialement !

Calcul des DDL



Test du khi 2 : DDL = (Nb de lignes - 1) * (Nb de colonnes - 1)

Test T de Student : $DDL = (n_1 - 1) + (n_2 - 1) = (n_1 + n_2) - 2$

Test du coefficient de corrélation r : $DDL = n - 2$