DM pré-EB 4 :
QRU 18

coucou mes pupuces, ce petit diapo est dédié à la correction détaillée d'un de mes bébés du DM pré-EB 4 : le 👹QRU 18👹

j'ai reçu une quantité gigantesque (6 en réalité) de messages de petits p1 ayant "légèrement" bloqué sur ce QRU de l'enfer, c'est pourquoi je me suis dit qu'il était plus judicieux de vous proposer ma correction du cheminement calculatoire qu'il fallait suivre (ou du moins que j'ai suivi)

je vais procéder à la correction de chaque item et je vous mettrai des petites explications bonus pour vous éclaircir tout ce bazar

si jamais vous n'avez pas encore fait ce fameux DM (logique il est sorti hier), n'hésitez pas à essayer de le faire avant de regarder cette correction pour rappel, voici la matrice que vous deviez étudier :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ps : il s'agit de l'anniversaire de Marina, une de vos vieillllllllllles de BDR

A) les valeurs propres de la matrice *M* sont 1 et 3

comme je l'ai indiqué dans la correction du DM, les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont les coefficients diagonaux, mais je vais vous montrer la démarche générale qu'il faut appliquer pour trouver ces valeurs

$$\begin{aligned}
MV = \mu V &\Leftrightarrow M - \mu I = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-\mu & 4 \\ 0 & 3-\mu \end{pmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow (1-\mu)(3-\mu) = 0 \\
&\Leftrightarrow S = \{1\,;3\}
\end{aligned}$$

- on soustrait μV et on divise par V
- on écrit les matrices
- on soustrait les matrices entre elles
- on passe par le déterminant
- on trouve 2 solutions : 1 et 3

B) la matrice de passage *P*, formée à partir des 2 vecteurs propres, est $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$

pour déterminer les vecteurs propres, on doit résoudre l'équation précédente, mais en introduisant cette fois les valeurs propres que nous avons trouvées à l'étape antérieure

$$MV_1 = V_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a + 4b \\ 3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 4b = a \\ 3b = b \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = a \\ b = 0 \end{cases}$$

- on écrit les matrices
- on calcule le produit MV_1
- on forme le système ci-contre
- on résout le système
- la condition est $b=0$, d'où $\boxed{V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$

on réitère le même processus qu'à la diapo précédente, mais cette fois en prenant la valeur de notre 2ème valeur propre, ce qui nous donne les opérations suivantes

$$\begin{aligned} MV_2 = 3V_2 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} c + 4d \\ 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c \\ 3d \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} c + 4d = 3c \\ 3d = 3d \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} c + 4 = 3c \\ d = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ d = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

- on écrit les matrices
- on calcule les produits MV_2 et $3V_2$
- on forme le système ci-contre
- on résout le système
- en prenant $d=1$ (choix le plus logique), on se retrouve avec $c=2$, d'où $\boxed{V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$

la fusion de ces 2 magnifiques vecteurs propres nous donne bien la matrice de passage P que je vous avais proposée (youpiii)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ps : il s'agit par ailleurs de l'anniversaire d'Asia, votre formidable tutrice d'histo

c) l'inverse de la matrice de passage *P* est $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$

là assez simple, il faut connaître sa formule : $\boxed{P^{-1} = \frac{1}{det\left(P\right)}\begin{pmatrix} a_{2,2} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{1,1} \end{pmatrix}}$

on commence par le déterminant : $\boxed{det\left(P\right) = 1 \times 1 - 2 \times 0 = 1}$

on peut passer au calcul de l'inverse : $\boxed{P^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$

(normalement je peux pas plus détailler cette partie)

D) $M = PDP^{-1}$; D = matrice diagonale définie à partir des valeurs propres de P

il s'agissait de l'item faux puisque c'est non pas à partir des valeurs propres de *P*, mais plutôt de *M* (i.e. les valeurs que vous avez trouvées précédemment)

le calcul de PDP^{-1} se fait ici en 2 temps : d'abord on fait le produit *PD* (oulaaa pardon), puis le produit du résultat de *PD* (encore désolé) par P^{-1} (#logik)

$$PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = M$$

comme vous le voyez, on retombe sur notre matrice *M* de départ (#magik) voili voulou, je crois qu'on s'est tout dit, j'ose espérer que ce QRU ne vous a pas trop fait suer (#oupsi...) et que vous ne me détestez pas pour cette immondice que j'ai créée de mes propres mains

en sah le QRU était paaas horrible non plus, j'ai essayé de vous mettre des valeurs assez simples pour pas que les calculs soient trop compliqués

toutefois, si même après ce (majesteux) diapo de 10 pages vous n'avez toujours pas compris, vous pouvez évidemment me renvoyez un message directement sur messenger, j'y répondrai avec plaisir

ps : dédi à devil may cry (le jeu que j'ai mis en fond de diapo), à ses combats trop stylés et au flow de fou de Dante