Pr. Maignant

Aide

EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Dulclaudiax

Coucou les petits P1 ! Je vous ai fait cette fiche pour essayer de vous aider à aborder le cours des équations différentielles, c'est donc une fiche à lire **avant** le vrai cours du prof si jamais vous n'avez pas fait maths au lycée ou si jamais vous voulez des petits rappels ! Ce n'est *pas* un support officiel mais simplement une aide :)

ALGÈBRE DE BASE

Qu'est-ce qu'une équation différentielle ?

Une équation différentielle est une équation dont **l'inconnue est une fonction** (généralement y(x) aussi notée y) et où interviennent une ou plusieurs **dérivées de cette fonction** (dérivée première y', dérivée seconde y" ou d'autres dérivées d'ordre supérieur).

Les équations différentielles sont dites **linéaires** car la fonction inconnue y et ses dérivées apparaissent sans multiplication entre elles ni puissances élevées, juste avec des coefficients.

Exemple :

- $3y + y' = 0$
- $y' + 2y = x + 3$
- $y'' + y' - 3y = e^x$

Qu'est-ce qu'une dérivée ?

La dérivation est une opération mathématique qu'on effectue sur une fonction pour en obtenir sa **dérivée**.
Pour dériver une fonction, il faut appliquer les transformations qu'on voit dans les tableaux ci-après sur tous les éléments de cette fonction.
Il existe des formules de dérivation simples (pour chaque terme), et composées (pour chaque type d'opération). On peut dériver une dérivée **autant de fois que l'on veut**, en effectuant ces mêmes opérations sur la fonction obtenue (y', y", y"'...)

De la même manière, la fonction dont est issue une dérivée s'appelle une **primitive** (par exemple, y est la primitive de la dérivée y').
Je vous conseillerais de connaître ces tableaux **si vous avez le temps** pour pouvoir jongler entre primitive et dérivée, ça peut servir pour calculer les solutions particulières.

Fonction	Dérivée
$a, a \in \mathbb{R}$	0
$ax, a \in \mathbb{R}$	a
x^2	$2x$
x^n $n \geq 1$ entier	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$ $n \geq 1$ entier	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
$e^{kx},\ k \in \mathbb{R}$	ke^{kx}

Tableau des dérivées **simples**

Fonction	Dérivée
$u+v$	$u'+v'$
$ku,\ k \in \mathbb{R}$	ku'
uv	$u'v+uv'$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$

Tableau des dérivées **composées** (opérations)

Exemple :

- $f(x) = 3e^x + 4x - 7 \rightarrow f'(x) = 3e^x + 4$
- $y = (2x+1)\ e^x \rightarrow y' = 2 * e^x + (2x+1) * e^x$

$y' = e^x\ ((2x+1) + 2) = e^x\ (2x+3)$

COMPRENDRE LES ED

Dans le cours d'équations différentielles, ce qu'il vous sera demandé le plus souvent est de **trouver une ou plusieurs solutions d'une équation différentielle** (ED).

Piège récurrent en QRU

Une équation différentielle, sans condition initiale, admet toujours **plusieurs solutions**. Les solutions s'expriment sous la forme d'une fonction, comprenant une ou plusieurs **constantes** notées C.

→ **Une ED d'ordre n admet n constantes dans ses solutions.** A chaque dérivée, une constante est ajoutée.

Par exemple, dans les ED de second ordre, la fonction y est dérivée 2 fois → **y''**. Dans la formule des solutions de cette ED, on va donc avoir deux constantes différentes notées C_1 et C_2.

Un piège courant repose sur "**une** solution", "**la** solution" ou "**les** solution**s**".

En effet, si la constante ne vous est pas donnée, mais simplement la formule générale des solutions d'une ED, alors cette formule représente **l'ensemble** des solutions, et non pas ~~une seule~~.

Par contre, si la constante est **fixée** (on lui attribue une valeur), ou si on vous donne une **fonction particulière**, alors vous aurez **UNE solution** de l'équation parmi tant d'autres. Il serait faux de dire qu'elle représente ~~les solutions~~ de l'ED.

Quelles sont les différents types d'ED ?

Dans ce cours, on sépare les équations différentielles selon 2 critères :
→ le **degré de dérivation** (ordre)
→ la **présence ou non de second membre** (homogénéité)
On les considère donc...

...selon l'ordre

ED du premier ordre

Une équation différentielle du premier ordre comporte une fonction et sa dérivée **première** (y') **uniquement**.
Exemple : 8y' + 5y = 2

ED du second ordre

Une équation différentielle du second ordre comporte une fonction et ses dérivées jusqu'à la dérivée **seconde** (y' et y").
Exemple : 7y" + y' - 5 = 0

...selon l'homogénéité

ED homogène

On dit qu'une équation différentielle est **homogène** lorsqu'elle ne possède **pas de second membre**, ou plus précisément que son second membre est égal à 0.
Elle est de la forme générale (pour une ED de second ordre) :

$$y'' + ay' + by = 0$$

Exemple : 3y' + 5y = 0

ED non homogène

On l'appelle également **ED avec second membre**, c'est-à-dire que ce second membre est non nul.
Elle est de la forme générale (pour une ED du second ordre)

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

Exemple : 4y" - 2y' + y = 7 ou bien 4y" + 2y = e^x

RÉSOUDRE UNE ED

Maintenant, l'objectif de ce cours (entre autres) et ce que vous aurez à l'examen consiste en savoir identifier, analyser et donner une ou des solutions d'une équation différentielle.
Il faut savoir se poser les bonnes questions :

Combien de fois est dérivée la fonction ?

→ Cela nous indique si on est face à une ED de **premier** ou **second ordre.**

Y a-t-il un second membre ?

→ Parfois, il faut **réarranger** les termes de l'équation pour se rendre compte qu'il y a un second membre. Ce second membre peut être un simple nombre, ou bien une “vraie” fonction.

Exemple :

- $4y' + 5y - 2 = 0$

Ici il ne faut pas se faire avoir par le 0 à droite. En effet, cette équation peut également s'écrire $4y' + 5y = 2$ → 2 est donc ici le second membre.

- $4y'' + 4y' - 3y = (2x-1)\, e^x$

Ici le second membre est évident : $(2x-1)\, e^x$

Solutions des ED avec second membre

Les équations différentielles avec second membre ont une particularité : elles admettent une **solution générale** qui correspond à la somme de la **solution générale de l'ED homogène** (la solution si on enlève le 2nd membre) ET d'une **solution particulière**

Solution générale = solution générale ED homogène + solution particulière

Donc quand on est face à une ED non homogène (=avec 2nd membre), il faut :
→ trouver la solution générale (càd la formule de solution de l'ED homogène)
→ trouver la solution particulière : il va falloir trouver une fonction/une solution particulière qui vérifie notre équation de départ

Exemple : on cherche la solution générale de l'équation $\boxed{y' - 2y = (3x - 1)\,e^{2x}}$

- Recherche de la solution de l'équation homogène

C'est une équation du premier ordre. La solution générale d'une ED1 est de la forme Ce^{-ax} avec a = – 2 ici. Donc la solution générale de l'ED homogène est :
→ $\mathbf{Ce^{2x}}$

- Recherche de la solution particulière

On cherche à trouver une solution qui vérifie notre équation.
Aparté : dans son livre, le professeur fait un QCM où il propose une solution obtenue avec des techniques très complexes à réaliser par soi-même donc que vous n'aurez normalement pas à faire. Cependant il est possible que le prof l'ait calculé pour vous et vous le mette dans un item (par ex "y=... est une solution particulière de ..."). Il faudra alors simplement remplacer l'inconnue par la solution particulière qu'il vous a donné, ne pas oublier de la dériver (car il y a y, mais aussi y'), et voir si l'égalité est vérifiée.
Pour reprendre cet exemple, je vous donne comme solution particulière :
$\mathbf{y(x) = (1{,}5\,x^2 - x)\,e^{2x}}$ → on va donc remplacer y dans l'ED par cette fonction.
Il faut également la dériver car on a y'
$\mathbf{y'(x) = (2 * 1{,}5x - 1) * e^{2x} + (1{,}5x^2 - x) * 2e^{2x} = (3x - 1)\,e^{2x} + (1{,}5x^2 - x)\,2e^{2x}}$
On remplace donc y' et y dans la formule par ces deux dernières fonctions :
$y' - 2y = (3x - 1)\,e^{2x} + (1{,}5x^2 - x)\,2e^{2x} - 2 * ((1{,}5\,x^2 - x)\,e^{2x})$
$= (3x - 1)\,e^{2x} + \cancel{(1{,}5x^2 - x)\,2e^{2x}} - \cancel{(1{,}5x^2 - x)\,2e^{2x}}$
$\mathbf{= (3x - 1)\,e^{2x}}$
On retrouve bien l'égalité de départ, donc $y(x) = (1{,}5\,x^2 - x)\,e^{2x}$ est bien une solution particulière de cette équation différentielle

- Solution générale

On a donc la solution de l'ED homogène et la solution particulière, on peut donc dire que **la solution générale de cette équation est** :

$$\boxed{y(x) = Ce^{2x} + (1{,}5\,x^2 - x)\,e^{2x}}$$

ED DU 2ND ORDRE

La dernière partie de cette fiche va traiter du cas particulier des **ED du 2nd ordre (homogène ou non)**.
En effet, on associe à une équation différentielle homogène du second ordre un **polynôme caractéristique** de la forme $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$.

Pour rappel, une ED2 est de la forme : **ay" + by' + cy= 0** (avec a ≠ 0).
On va donc traiter notre équation comme si c'était un polynôme du second degré :

1ère étape : calculer le discriminant

En associant notre ED à un polynôme, on peut calculer **Δ, le discriminant**, avec la formule : **$\Delta = b^2 - 4ac$**

Exemple : 5y" + 2y' + 3y = 0 → $5x^2 + 2x + 3 = 0$
$\Delta = 2^2 - 4 * 5 * 3 = 4 - 60 = -56$

2ème étape : calculer les racines

Selon le discriminant, les racines (qui sont des valeurs qu'on doit calculer pour obtenir la solution de l'ED) vont être **différentes**.

Δ > 0

Il y a **2 racines** à calculer. Elles sont de la forme :

$$\boxed{r = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

Exemple : avec y" + 6y' + 5y = 0, alors Δ = 16 et :
$r_1 = (-6 + \sqrt{16}) / (2 * 1) = (-6 + 4) / 2 = -1$
$r_2 = (-6 - \sqrt{16}) / (2 * 1) = (-6 - 4) / 2 = -5$

Ne pas confondre les racines r et les constantes C !

Δ = 0

Il n'y a **qu'une racine** à calculer. Elle est de la forme :

$$\boxed{r = \frac{-b}{2a}}$$

Exemple : avec y" + 4y' + 4y = 0, alors Δ = 0 et :
r = (-4) / 2 * 1 = - 2

Δ < 0

Jusqu'à présent, on était dans l'ensemble des **réels**. Cependant, lorsque le déterminant devient négatif, on va utiliser des **nombres complexes**.
Les racines vont être dites complexes conjuguées (car elles vont de paire avec le "i" désignant les nombres imaginaires).
Pourquoi cela ?
Parce que pour calculer des racines, on doit prendre la racine carrée du discriminant. Or, il n'y a **pas de racine ~~réelle~~ d'un nombre négatif**.
Il y a **2 racines complexes conjuguées** à calculer. Elles sont de la forme :
Le i n'a pas de valeur, c'est une lettre pour indiquer qu'on parle d'une racine complexe

$$\boxed{r \pm i\omega}$$

Avec $r = \dfrac{-b}{2a}$ et $\omega = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Exemple : y" + 2y' + 5y = 0, Δ = - 16
r = (-2) / (2 * 1) = - 1
ω = √-16 / (2* 1) = 2
Donc les 2 racines complexes sont **-1 + i2** et **-1 - i2**

3ème étape : calculer les solutions

Etape la plus simple : il suffit de remplacer les lettres r par les racines qu'on a calculé, dans les formules suivantes :

Δ > 0 -------------→ $C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$

Δ = 0 -------------→ $(C_1x + C_2)e^{rx}$

Δ < 0 -----→ $(C_1 \sin(\omega x) + C_2 \cos(\omega x))e^{rx}$

Rappel : ce sont les solutions des équations homogènes