Pr. Maignant

Biostatistiques

EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Dulclaudiax

Sommaire

*Je vous ai fait une **fiche d'aide** qui va avec ce cours pour vous aider à mieux appréhender les QRU de calculs notamment. Vous pouvez la lire avant de commencer, que vous ayez fait maths au lycée ou non, ça vous fera un cours ou bien des rappels :) Mes remarques sont de cette couleur et en italique.*

DÉFINITIONS

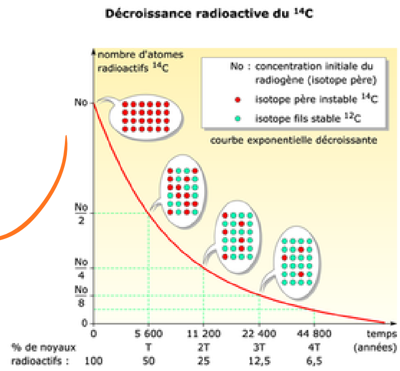
Une **équation différentielle** (ED) est une équation dont la **solution est une fonction** et où interviennent **une ou plusieurs dérivées de cette fonction**.
Exemple : 5y' + 3y = 2 est une ED, et on cherche la fonction y qui vérifie cette équation.
Une ED a le plus souvent **plusieurs solutions**. Les solutions d'une équation différentielle s'appellent le **flot**.
Toute équation différentielle est donc une équation reliant une **fonction** et ses **dérivées successives** d'ordre 1, 2, … n.

$$\boxed{F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0}$$

La plupart des équations différentielles ne sont pas solvables de manière analytique *(avec une formule explicite simple). Cependant dans ce cours on traite surtout d'équations différentielles* ***linéaires****, donc qu'on peut résoudre analytiquement.*

Utilité des équations différentielles

- Modéliser les oscillations d'un pendule, d'un ressort, d'une corde…
- Modéliser les circuits électriques
- Estimer un taux de radioactivité (demi-vie…)
- Dater au carbone 14
- Modéliser des systèmes complexes (comme par exemple le modèle proies-prédateurs)



EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE

Une équation différentielle est de **premier ordre** (ED1) si la fonction y est dérivée une seule fois (y').

Soit E un espace vectoriel normé complet sur R. On appelle équation différentielle un premier ordre une équation de la forme y' = f (x, y), où f est une application continue sur un ouvert U de R x E à valeurs dans E.
On appelle solution de cette équation une application φ dérivable sur un intervalle I de R à valeurs dans E telle que, pour tout point x de I, (x, φ(x)) appartienne à U et que φ'(x) = f (x, φ(x)).

C'est la partie théorique du cours du prof qui ne tombera pas telle quelle à l'examen ne vous inquiétez pas :)

ED1 sans second membre

On dit qu'une ED est **homogène** lorsqu'elle n'a pas de second membre, ou plutôt que son second membre est nul.

Une équation différentielle du premier ordre sans second membre est de la forme :

$$\boxed{y' + ay = 0}$$ avec a un réel quelconque

Remarque : Une ED1 sans second membre a **toujours une solution**. Il y a justement comme solution évidente **y = 0** !

Une ED1 a en fait une **infinité de solutions** mais **une seule** solution passant par un point donné de type (a,b) *(point de l'espace produit R x E du paragraphe du prof)*

La **solution générale** de l'ED (donc les solutions) est :
avec C une constante réelle qu'on ne cherche pas à calculer.

$$\boxed{y = Ce^{-ax}}$$

On obtient ce résultat avec la méthode de séparation des variables *(= on met tous les y d'un côté et les x de l'autre, puis on intègre des deux côtés)*

Tut'alerte : attention à l'équation !

On peut très bien **réarranger** les termes d'une équation. Une ED1 sans second membre peut alors s'écrire **y' = ay**. La solution générale de cette équation sera donc **Ce^{ax}** → **attention aux signes !**

Il faut alors faire attention à utiliser la **bonne formule** de solution, mais aussi à **ne pas confondre** un second membre avec un terme linéaire qui contient la fonction y ou une de ses dérivées.

*Exemple : 8y' = 5y → c'est bien une équation **homogène** (pas de second membre) car on peut aussi l'écrire 8y' - 5y = 0*

Vous avez également remarqué qu'il n'y a **pas de coefficient devant le y'**. Pour utiliser correctement la formule de solution, il va alors falloir enlever le facteur si jamais il y en a un !

Exemple : **y' + 7y = 0**

L'équation est ici de la forme y' +ay = 0, sans coefficient devant la dérivée. On peut donc utiliser la formule de solution Ce^{-ax} avec a = 7.

On a donc les solutions : Ce^{-7x}

5y' + 3y = 0

Ici il y a un coefficient devant la dérivée (5y'). Pour s'en débarrasser et pour faire ressortir le a, on met l'équation sous la forme y' = ay → 5y' = -3y.

En divisant des deux côtés par 5, on obtient alors y' = (-3/5)y donc a = -(3/5)
On utilise alors la formule Ce^{ax} et on obtient $Ce^{-(3/5)x}$

Si on **fixe des contraintes** (x = 2, y = $\sqrt{2}$, C = -7...), les solutions sont alors beaucoup plus **limitées**.

ED1 avec second membre

Une équation différentielle de premier ordre avec **second membre réel** est de la forme

$$y' + ay = b$$ avec a et b des réels quelconques

Remarque : Lorsqu'on parle de **second membre**, on parle d'un terme qui n'est **pas lié à la fonction y ou à une de ses dérivées** !

Comme précédemment, une ED1 a toujours une solution, notamment $y_0 = \frac{b}{a}$
y_0 → y(x) pour une valeur de x qu'on fixe arbitrairement et qui est x_0 ; ce n'est pas y=0 !

Une **équation différentielle non homogène**, c'est-à-dire qui comporte un second membre non nul, et ce qu'importe l'ordre, a comme solution générale :

Solution générale = solution générale ED homogène + solution particulière

La **solution générale** d'une ED1 avec second membre réel est donc de la forme :

$$y = Ce^{-ax} + \frac{b}{a}$$

C'est bien la somme de la solution de l'ED1 sans second membre et de la solution particulière y_0

Si l'ED1 sans second membre est présentée sous la forme **y' = ay + b**, alors la solution générale est de la forme $y = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$

Exemple : **2y' + 6y = 4**
Comme il y a un coeff devant le y', on peut mettre sous la forme y' = ay + b pour que ce soit plus simple de le faire disparaître
2y' = -6y + 4 → y' = -3y + 2
On a donc a = -3 et b = 2
On remplace dans la formule et on obtient comme solution générale : $y = Ce^{-3x} + \frac{2}{3}$

On a vu jusqu'à présent la situation où le <u>second membre est un **nombre réel**</u>. Lorsque le second membre est une **fonction**, on procède avec ce qu'on appelle la "**<u>méthode de la variation de la constante" suivie d'une intégration</u>** (calcul intégral). *Cela consiste à transformer la constante C de la solution de l'ED homogène en <u>fonction</u>, on la <u>dérive</u> ensuite pour trouver une équation sur cette fonction, puis on <u>intègre</u> pour obtenir la solution. Ici retenez juste le nom de la méthode !*

Théorème : (Equation différentielle $y' + a(x)y = b(x)$)
Soient $a, b \in \mathcal{C}(I, K)$, A une primitive de a sur I, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$.
Il existe une unique solution sur I de l'équation $y' + a(x)y = b(x)$ telle que $y(x_0) = y_0$; elle est définie par :

$$\forall x \in I, y(x) = y_0 e^{A(x_0) - A(x)} + \int_{x_0}^{x} b(t) e^{A(t) - A(x)} dt.$$

Théorème : (Equation différentielle $y' + a(x)y = b(x)$, solutions générale et particulière)
Soient $a, b \in \mathcal{C}(I, K)$, A une primitive de a sur I, $\bar{y}$ une solution particulière de l'équation $y' + a(x)y = b(x)$ sur I. Soit de plus y une fonction dérivable sur I. Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) $y' + ay = b$ sur I.
(ii) Il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que, sur I, on ait

$$\underbrace{y}_{\text{solution générale de l'équation avec second membre}} = \underbrace{\bar{y}}_{\text{solution particulière}} + \underbrace{\lambda e^{-A}}_{\text{solution générale de l'équation homogène}}$$

En d'autres termes, si on connaît une solution particulière de l'équation $y' + a(x)y = b(x)$, alors on en connaît toutes les solutions.

Traduction mathématique de tout ce qu'on vient de voir, issue de la diapo du prof. C'est ok de rien comprendre, ça ne tombera jamais tel quel à l'examen.

<u>Exemple</u> : **y' - y = (x+1) e^x**

1. On cherche la solution de l'équation homogène : y' - y = 0.

C'est une ED1 sans second membre avec a = -1, donc Ce^x

2. On cherche la solution particulière. Il nous est proposé : $y = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)e^x$

On va vérifier si cette fonction vérifie notre équation

→ On dérive y : $y' = (x+1)e^x + \left(\frac{x^2}{2} + x\right)e^x$

→ On remplace maintenant y et y' dans notre équation de départ :

$$y' - y = (x+1)e^x + \left(\frac{x^2}{2} + x\right)e^x = xe^x + e^x + \frac{x^2}{2}e^x + xe^x - \frac{x^2}{2}e^x - xe^x = xe^x + e^x$$

En factorisant par e^x le résultat obtenu, on retrouve bien notre ED :

$$y' - y = xe^x + e^x = (x+1)e^x$$

3. On additionne la solution de l'ED homogène et la solution particulière et on trouve la solution générale : $y = Ce^x + \left(\frac{x^2}{2} + x\right)e^x$

EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE

Une équation différentielle est de **second ordre** (ED2) si la fonction y est dérivée deux fois (y”).

ED2 sans second membre

Une équation différentielle du second ordre homogène (sans second membre) est de la forme :

$$ay'' + by' + cy = 0$$

avec a ≠ 0

On associe à cette équation un polynôme caractéristique de la forme :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

dont le discriminant est : $\Delta = b^2 - 4ac$

*Pour trouver les **solutions** d’une ED2 homogène, on va donc lui associer ce polynôme dont on va calculer le **déterminant** puis les **racines**. On remplacera ensuite les racines qu’on a trouvé dans la formule finale de la solution.*

Δ > 0

Si le déterminant calculé est strictement positif, alors on calculera **2 racines** qui sont de la forme :

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Les solutions de cette ED seront alors de la forme : $C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$

Ne pas confondre les racines r et les constantes C !

Exemple : **2y” + 4y’ + y = 0**, on considère √8 = 3 (pour simplifier les calculs)

1. On calcule le discriminant :

a = 2, b = 4 et c = 1 donc Δ = 16 - 4 * 2 * 1 = 8

2. On calcule les racines : $r_1 = \frac{-4+\sqrt{8}}{2 \times 2} = -\frac{1}{4}$ $r_2 = \frac{-4-\sqrt{8}}{2 \times 2} = -\frac{7}{4}$

3. On remplace dans la formule : $C_1e^{-\frac{1}{4}x} + C_2e^{-\frac{7}{4}x}$

Δ = 0

Si le déterminant calculé est nul, alors on calculera **1 seule racine** qui est de la forme :

$$\boxed{r = \frac{-b}{2a}}$$

Les solutions de cette ED seront alors de la forme : $(C_1 x + C_2)e^{rx}$

Exemple : **2y" + 4y' + 2y = 0**

1. On calcule Δ = 16 - 4 * 2 * 2 = 0
2. On calcule la racine $r = \frac{-4}{2 \times 2} = -1$
3. On remplace dans la formule : $(C_1 x + C_2)e^{-x}$

Δ < 0

En effet, dans le calcul des racines, on doit toujours prendre la racine carrée du déterminant. Or, avec Δ est strictement négatif, il n'existe pas de racine carrée d'un nombre réel. Les racines vont alors s'exprimer dans l'ensemble non plus des nombres réels mais des nombres complexes.

On va alors chercher à calculer **2 racines complexes conjuguées** qui sont de la forme :

$$\boxed{r \pm i\omega}$$

Ici r ne correspond pas aux racines mais fait partie des racines

avec : $r = \frac{-b}{2a}$ et $\omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$

On retourne dans l'ensemble des réels et les solutions de cette ED seront alors de la forme :

$$(C_1 \sin(\omega x) + C_2 \cos(\omega x))e^{rx}$$

Exemple : **2y" + 4y' + 6y = 0**, on considère √32 = 6

1. On calcule Δ = 16 - 48 = -32
2. On calcule les racines conjuguées : $r_{1et2} = \frac{-4 \pm i\sqrt{32}}{2 \times 2} = -1 \pm i\frac{3}{2}$
3. On trouve r = -1 et ω = 3/2
4. On remplace dans la formule : $\left(C_1 \sin\left(\frac{3}{2}x\right) + C_2 \cos\left(\frac{3}{2}x\right)\right)e^{-x}$

Théorème : (Equation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$)
Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 0$. On appelle polynôme caractéristique de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$ le polynôme $aX^2 + bX + c$. Notons $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

- **Cas complexe** ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

1. Si $\Delta \neq 0$, soient r_1 et r_2 les racines distinctes de $aX^2 + bX + c$. Les solutions complexes de $ay'' + by' + cy = 0$ sont alors toutes les fonctions $\boxed{x \mapsto \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$.
2. Si $\Delta = 0$, soit r l'unique racine de $aX^2 + bX + c$. Les solutions complexes de $ay'' + by' + cy = 0$ sont alors toutes les fonctions $\boxed{x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{rx}}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

- **Cas réel** ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

1. Si $\Delta > 0$, soient r_1 et r_2 les racines (réelles) distinctes de $aX^2 + bX + c$. Les solutions réelles de $ay'' + by' + cy = 0$ sont alors toutes les fonctions $\boxed{x \mapsto \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
2. Si $\Delta = 0$, soit r l'unique racine de $aX^2 + bX + c$. Les solutions réelles de $ay'' + by' + cy = 0$ sont alors toutes les fonctions $\boxed{x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{rx}}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
3. Si $\Delta < 0$, soient $r + i\omega$ et $r - i\omega$ les racines (complexes conjuguées) distinctes de $aX^2 + bX + c$. Les solutions réelles de $ay'' + by' + cy = 0$ sont alors toutes les fonctions $\boxed{x \mapsto (\lambda \sin(\omega x) + \mu \cos(\omega x))\, e^{rx}}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, que l'on peut aussi mettre sous la forme $x \mapsto \lambda \sin(\omega x + \phi)e^{rx}$ ou $x \mapsto \lambda \cos(\omega x + \phi)e^{rx}$, $\lambda, \phi \in \mathbb{R}$.

Si de plus une condition initiale de la forme $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$ est fixée, avec $x_0 \in I$ et $y_0, y_1 \in \mathbb{K}$, alors la valeur des constantes est fixée. L'équation avec condition initiale possède une unique solution.

Idem, tout ce qu'on vient de voir traduit mathématiquement

ED2 avec second membre

Une équation différentielle du second ordre avec second membre est de la forme :

$$\boxed{ay'' + by' + cy = d}$$ avec a ≠ 0 et d ≠ 0

Tout comme les équations différentielles de premier ordre avec second membre :

Solution générale = solution générale ED homogène + solution particulière

Dans une ***ED1*** *avec second membre, il suffisait de fixer une seule condition initiale (y_0) pour que l'équation n'admette alors* ***qu'une seule solution****.*
Dans une ***ED2*** *avec second membre, il faut fixer* ***deux*** *conditions initiales : $y_0 = y(x_0)$ et $y_1 = y'(x_0)$ pour qu'il n'y ait alors* ***qu'une seule solution*** *à l'équation.*

De nouveau : les diapos du prof

Théorème : (Equation différentielle $ay'' + by' + cy = d(x)$)
Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$ (avec $a \neq 0$), $d \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$, $x_0 \in I$ et $y_0, y_1 \in \mathbb{K}$. Il existe une unique solution sur I de l'équation $ay'' + by' + cy = d(x)$ telle que $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$.

Théorème : (Equation différentielle $ay'' + by' + cy = d(x)$)
Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$ (avec $a \neq 0$), $d \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ et $\bar{y}$ une solution particulière de l'équation $ay'' + by' + cy = d(x)$ sur I. Soit de plus $y : I \to \mathbb{K}$ une application deux fois dérivable sur I. Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) $ay'' + by' + cy = d$ sur I.
(ii)

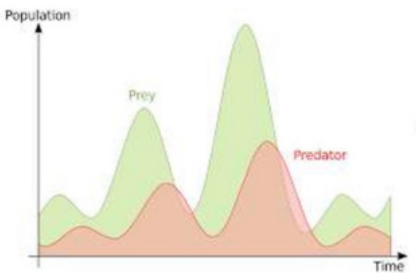
$$\underbrace{y}_{\text{solution générale de l'équation avec second membre}} = \underbrace{\bar{y}}_{\text{solution particulière}} + \underbrace{\tilde{y}}_{\text{solution générale de l'équation homogène}}$$

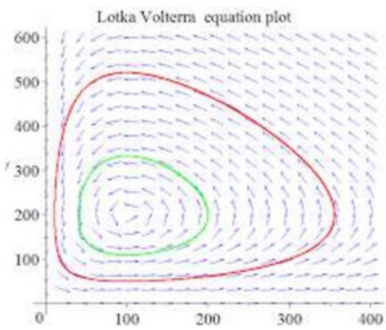
En d'autres termes, si on connaît une solution particulière de l'équation $y' + a(x)y = b(x)$, alors on en connaît toutes les solutions.

MODÈLES EN ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Modèle de Lotka-Volterra

Les **équations de prédation de Lotka-Volterra**, que l'on désigne aussi sous le terme de **"modèle proie-prédateur"**, sont un **couple d'équations différentielles non linéaires du premier ordre** et sont couramment utilisées pour décrire la dynamique des systèmes biologiques dans lesquels un prédateur et sa proie interagissent.
Comme les équations ne sont pas linéaires *(car il y a des produits de fonction, x*y)* il n'y a **pas de solution analytique**. On ne peut pas résoudre la 1ère équation sans la 2ème et inversement.





Dans ce système :

- t désigne le temps
- x(t) désigne l'effectif des proies
- y(t) désigne l'effectif des prédateurs
- x'(t) et y'(t) désignent les variations des populations au cours du temps
- α désigne le taux de reproduction des proies
- β désigne le taux de mortalité des proies
- δ désigne le taux de reproduction des prédateurs
- γ désigne le taux de mortalité des prédateurs

Le système s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)\left(\alpha - \beta y(t)\right) \\ y'(t) = y(t)\left(\delta x(t) - \gamma\right) \end{cases}$$

Modèle de Verhulst

Verhulst a proposé de modéliser la dynamique de population, le cycle de vie d'une innovation etc. par une **équation différentielle non linéaire** de la forme :

$$\begin{cases} y(0) = y_0 \\ y' = ry\left(1 - \frac{y}{K}\right) \end{cases}$$

Autrement dit, **l'évolution de la population** est une fonction de la population et de la population au carré *(d'où la non linéarité). C'est un peu comme un effet boule de neige où ça croit vite au début puis ça ralentit; on l'observe lors des épidémies par exemple.*

Pour résoudre cette équation, il faut effectuer un **changement de variable** *(ça la rend alors linéaire, plus simple à intégrer et on peut la résoudre de façon analytique)*

On pose alors $z = \frac{1}{y}$. En remplaçant dans l'équation on obtient $z' = rz\left(1 - \frac{1}{kz}\right)$

Soit au final $z' = rz - \frac{r}{k}$ c'est-à-dire une ED1 avec second membre.