Séance Discord n°2

Méthodologie

Equations différentielles

1 - De quel ordre est l'équation ?

2 - Est-elle homogène ?

3 - Trouver les ou une solution

L'ordre de l'équation

- 1er ordre → fonction dérivée une seule fois (y et y')
- 2nd ordre → fonction dérivée deux fois (y, y' et y'')

ED homogène ou non

- ED homogène = sans second membre
- ED non homogène = avec second membre

Tableau des solutions

	ED 1	ED 2		
		$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Homogène	$y = Ce^{-ax}$	$r = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ $C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$	$r = \frac{-b}{2a}$ $(C_1x + C_2)e^{rx}$	$r \pm i\omega$ $(C_1 \sin(\omega x) + C_2 \cos(\omega x))e^{rx}$
Non homogène	$y = Ce^{-ax} + \frac{b}{a}$	+ solution particulière		

Méthodologie

Variables aléatoires

1 - Analyser l'énoncé
2 - Trouver la bonne loi
3 - Trouver la bonne formule

Analyse de l'énoncé

- Quelle est la variable aléatoire dont on parle ?
- Quelles sont les données qu'on nous donne ?

Analyse de l'énoncé

Quelle est la variable aléatoire ?

Exemple : Dans un petit groupe de 1200 étudiants en Pass, 1000 n'ont pas les cheveux bruns. On tire au hasard 50 étudiants simultanément. On souhaite connaître le nombre d'individus ayant les cheveux bruns dans cet échantillon.

Analyse de l'énoncé

Quelle est la variable aléatoire ?

<u>Exemple</u> : Dans un petit groupe de 1200 étudiants en Pass, 1000 n'ont pas les cheveux bruns. On tire au hasard 50 étudiants simultanément. On souhaite connaître le nombre d'individus ayant les cheveux bruns dans cet échantillon.

VA → <u>"nombre d'étudiants aux cheveux bruns"</u>

Analyse de l'énoncé

Quelles sont les données de l'énoncé ?

<u>Exemple</u> : Dans un petit groupe de 1200 étudiants en Pass, 1000 n'ont pas les cheveux bruns. On tire au hasard 50 étudiants simultanément. On souhaite connaître le nombre d'individus ayant les cheveux bruns dans cet échantillon.

Analyse de l'énoncé

Quelles sont les données de l'énoncé ?

<u>Exemple</u> : Dans un petit groupe de 1200 étudiants en Pass, 1000 n'ont pas les cheveux bruns. On tire au hasard 50 étudiants simultanément. On souhaite connaître le nombre d'individus ayant les cheveux bruns dans cet échantillon.

$N = 1200$

$D = 1200\text{-}1000 = 200$

$n = 50$

Trouver la bonne loi

1 - La VA est-elle discrète ou continue ?

Est-ce qu'elle prend des <u>valeurs isolées</u> ? *(Ex : nombre d'enfants, âge civil…)*

→ ***VA discrète***

Est-ce qu'elle peut prendre <u>n'importe quelle valeur dans un intervalle</u> ? *(Ex : poids, temps, taille…)*

→ ***VA continue***

Trouver la bonne loi

1 - La VA est-elle discrète ou continue ?

<u>Exemple</u> : Dans le service d'urgence de l'hôpital Pasteur, le personnel accueille en moyenne 22 patients en coma éthylique le soir entre 21h et 1h du matin. Il accueille aussi en moyenne 5 patients ayant fait une overdose dans la même tranche d'horaires

Trouver la bonne loi

1 - La VA est-elle discrète ou continue ?

__Exemple__ : Dans le service d'urgence de l'hôpital Pasteur, le personnel accueille en moyenne 22 patients en coma éthylique le soir entre 21h et 1h du matin. Il accueille aussi en moyenne 5 patients ayant fait une overdose dans la même tranche d'horaires

VA → __discrète__

Trouver la bonne loi

1- La VA est-elle discrète ou Continue ?

<u>Exemple</u> : On étudie le temps nécessaire pour stériliser du matériel médical contaminé par une bactérie A.
On suppose que, à chaque instant, la bactérie a un risque instantané d'élimination constant égal à $\lambda = 2$ par minute

Trouver la bonne loi

1 - La VA est-elle discrète ou continue ?

Exemple : On étudie le temps nécessaire pour stériliser du matériel médical contaminé par une bactérie A.

On suppose que, à chaque instant, la bactérie a un risque instantané d'élimination constant égal à $\lambda = 2$ par minute

VA → continue

discrète

Trouver la bonne loi

2a - Est-ce qu'il y a une épreuve de Bernoulli ?

Epreuve de Bernoulli : expérience aléatoire avec 2 issues, un “succès” et un “échec’

Si oui :
→ **Loi de Bernoulli**
→ **Loi binomiale**
→ **Loi géometrique**
→ **Loi hypergéometrique**
Si non :
→ **Loi de Poisson**

Exemples

QRU 1 : Au milieu d'une route, le chemin se sépare en 2. La probabilité que le chemin de gauche soit choisi est de 0,8. 4 personnes arrivent à cette intersection. Quelle est la probabilité que 3 d'entre elles choisissent le chemin de droite ?

QRU 2 : Une usine de fabrication de pneus produit 1000 pneus par jours. Parmi ceux-ci, en moyenne on en trouve 200 défectueux. Durant un contrôle, on pioche 50 pneus de manière aléatoire. On définit la variable aléatoire X à « nombre de pneus défectueux dans l'échantillon » tel que X = 10.

Trouver la bonne loi

Et donc, loi de Bernoulli, binomiale ou géométrique ?

Est-ce qu'on répète plusieurs fois l'épreuve de Bernoulli ?

→ Si non : loi de Bernoulli

Est-ce on répète les épreuves jusqu'à un succès (ou un échec) ?

→ SI oui: loi géométrique

→ Si non: loi binomiale

Trouver la bonne loi

Cas particulier : la loi hypergéométrique

Situation de base :

→ Il existe une population avec un certain nombre d'éléments qui possède une caractère X *(ex : ils sont malades)*

→ On prend un échantillon de cette population et on se demande quelle est la proba qu'un certain nombre possède le caractère X

N : taille de la pop; D : nombre d'individus avec le caractère X dans la pop; n = taille de l'échantillon

Trouver la bonne loi

Loi de Poisson

On nous donne un taux exprimé par un certain nombre d’évènements par unité de temps la plupart du temps ++

Exercices

De quelle loi de probabilité s'agit-il ?

Blandine lance une pièce et on compte comme une victoire le fait de tomber sur pile. La probabilité de tomber sur « face » (P(F)) étant de 0,75, indiquez la probabilité quand elle réalise un lancer, d'obtenir une réussite

Exercices

De quelle loi de probabilité s'agit-il ?

Blandine lance une pièce et on compte comme une victoire le fait de tomber sur pile. La probabilité de tomber sur « face » (P(F)) étant de 0,75, indiquez la probabilité quand elle réalise un lancer, d'obtenir une réussite

→ **LOI DE BERNOULLI**

Exercices

De quelle loi de probabilité s'agit-il ?

On réalise une étude concernant un nouveau traitement contre la tuberculose. Parmi le groupe test, on considère comme un succès que « le nouveau traitement ait guéri le patient ». La probabilité d'un succès est $p = 0{,}2$. On pioche un patient au hasard et on regarde s'il est guéri ou non.

Exercices

De quelle loi de probabilité s'agit-il ?

On réalise une étude concernant un nouveau traitement contre la tuberculose. Parmi le groupe test, on considère comme un succès que « le nouveau traitement ait guéri le patient ». La probabilité d'un succès est p = 0,2. On pioche un patient au hasard et on regarde s'il est guéri ou non.

→ **LOI DE BERNOULLI**

Exercices

De quelle loi de probabilité s'agit-il ?

Au cours d'un essai clinique, 100 patients reçoivent tour à tour le même traitement. On considère la variable aléatoire X telle qu'un succès soit « le traitement est efficace ». La probabilité d'un succès est p = 0,2. On regarde les effets du traitement sur 4 patients différents, à la suite

Exercices

De quelle loi de probabilité s'agit-il ?

Au cours d'un essai clinique, 100 patients reçoivent tour à tour le même traitement. On considère la variable aléatoire X telle qu'un succès soit « le traitement est efficace ». La probabilité d'un succès est p = 0,2. On regarde les effets du traitement sur 4 patients différents, à la suite

→ **LOI BINOMIALE**

Exercices

De quelle loi de probabilité s'agit-il ?

Parmi une population de 400 hémiplégiques en France, 20 ont pu récupérer en partie la motricité de leur membre paralysé grâce à une thérapie miroir. Quelle est la probabilité que sur 50 patients, 10 aient récupéré grâce à cette thérapie ?

Exercices

De quelle loi de probabilité s'agit-il ?

Parmi une population de 400 hémiplégiques en France, 20 ont pu récupérer en partie la motricité de leur membre paralysé grâce à une thérapie miroir. Quelle est la probabilité que sur 50 patients, 10 aient récupéré grâce à cette thérapie ?

→ **LOI HYPERGEOMETRIQUE**

inspiré d'annales !

Exercices

De quelle loi de probabilité s'agit-il ?

Après une intervention chirurgicale, le risque d'infection est de 7%. Le service de chirurgie réalise 1000 interventions par an. Quelle est la probabilité d'observer 40 complications sur l'année ?

inspiré d'annales !

Exercices

De quelle loi de probabilité s'agit-il ?

Après une intervention chirurgicale, le risque d'infection est de 7%. Le service de chirurgie réalise 1000 interventions par an. Quelle est la probabilité d'observer 40 complications sur l'année ?

→ **LOI BINOMIALE**

inspiré d'annales !

Exercices

De quelle loi de probabilité s'agit-il ?

On observe en moyenne 3 patients venant pour d'exacerbation de BPCO (bronchopneumopathie chronique obstructive) par jour aux urgences. La probabilité d'en observer au moins 15 en une semaine est donnée par :

inspiré d'annales !

Exercices

De quelle loi de probabilité s'agit-il ?

On observe en moyenne 3 patients venant pour d'exacerbation de BPCO (bronchopneumopathie chronique obstructive) par jour aux urgences. La probabilité d'en observer au moins 15 en une semaine est donnée par :

→ **LOI DE POISSON**

inspiré d'annales !

Exercices

De quelle loi de probabilité s'agit-il ?

Durant l'étude d'un pansement gastrique, on s'intéresse au nombre de survenues d'effets indésirables dans un échantillon de 60 individus. On donne p « le patient a des effets indésirables » avec p=0,02. Quelle loi faudrait-il utiliser pour estimer la probabilité que 10 patients parmi les 60 aient des effets indésirables ?

inspiré d'annales !

Exercices

De quelle loi de probabilité s'agit-il ?

Durant l'étude d'un pansement gastrique, on s'intéresse au nombre de survenues d'effets indésirables dans un échantillon de 60 individus. On donne p « le patient a des effets indésirables » avec p=0,02. Quelle loi faudrait-il utiliser pour estimer la probabilité que 10 patients parmi les 60 aient des effets indésirables ?

→ **LOI BINOMIALE**

continue

Trouver la bonne loi

2b - Quelle loi Continue Choisir ?

Est-ce qu'on parle d'un taux / risque instantané ?
Est-ce qu'on nous demande un temps entre 2 évènements ?

Si oui :
→ Loi exponentielle

continue

Trouver la bonne loi

2b - Quelle loi Continue Choisir ?

Est-ce qu'on nous dit que quelque chose est distribué uniformément ?
Est-ce que la probabilité est toujours la même / c'est équiprobable ?

Si oui :
→ Loi uniforme

Trouver la bonne loi

continue

2b - Quelle loi Continue Choisir ?

Est-ce qu'on nous parle de loi de Gauss, de distribution normale ?

Si oui :
→ Loi normale

Est-ce qu'elle est centrée-réduite ?

Si oui :
→ Loi normale centrée-réduite

Attention aux données !

- n = nombre d’essais ou taille de l’échantillon
- p = proba
- k = nombre de succès que l’on cherche

Mots-clés

Pour les lois avec plusieurs épreuves de Bernoulli :

- “**essais**”, “**on répète l’expérience**”

Loi hypergéométrique

- “**défectueux**”, “**échantillon**”

Loi géométrique

- “… **au bout du n-ième essai**”

Loi de Poisson

- “**taux**” “**nb de … par heure/ par an/ par jour**”

Loi uniforme

- “**uniforme**”, “**équiprobable**”

Loi exponentielle

- “**risque instantané**”, “**temps/durée entre…**”

Pièges récurrents

- Le taux lambda
- Savoir qui est k, n, p...
- Loi binomiale vs. loi géométrique
- Loi de Poisson vs. loi exponentielle

inspiré d'annales !

QRU 1

Un neurologue souhaite analyser le temps entre deux crises d'épilepsie (en mois) chez des patients sous lévétiracétam, un antiépileptique censé espacer les crises. Il trouve que le taux lambda est égal à 0,5. Quel est le nombre moyen de crises par mois ?

A) 2
B) 0,5
C) 4
D) 0,25
E) Les propositions A, B, C et D sont fausses

inspiré d'annales !

QRU 1

Un neurologue souhaite analyser le temps entre deux crises d'épilepsie (en mois) chez des patients sous lévétiracétam, un antiépileptique censé espacer les crises. Il trouve que le taux lambda est égale à 0,5. Quel est le nombre moyen de crises par mois ?

A) 2
B) 0,5
C) 4
D) 0,25
E) Les propositions A, B, C et D sont fausses

QRU 2

Mr P adore les jeux d'argents. Il décide de jouer au blackjack, en sachant qu'à chaque partie il a 1 chance sur 10 de remporter cette dernière. Quelle est la probabilité qu'il remporte sa première partie au bout du 4e essai ? Indiquez la proposition exacte :

A) 10/100
B) 15/1000
C) 7,29/100
D) 20/100
E) Les propositions A, B, C et D sont fausses

QRU 2

Mr P adore les jeux d'argents. Il décide de jouer au blackjack, en sachant qu'à chaque partie il a 1 chance sur 10 de remporter cette dernière. Quelle est la probabilité qu'il remporte sa première partie au bout du 4e essai ? Indiquez la proposition exacte :

A) 10/100
B) 15/1000
C) 7,29/100
D) 20/100
E) Les propositions A, B, C et D sont fausses

QRU 3

Dans l'heure où il se lève, après avoir trainé dans son lit un certain temps, Alexis se fait un café pour attaquer sa journée. Sachant que son réveil sonne à 7h00 et qu'il peut sortir du lit à tout moment entre 7 et 8h, donnez la réponse vraie :

A) La probabilité qu'il se fasse un café à 7h20 pétantes est de 0,2

B) La probabilité qu'il se fasse un café entre 7h10 et 7h40 est de 0,5

C) La probabilité qu'il se fasse un café après 7h45 est de 0,75

D) La probabilité qu'il se fasse un café entre 7h13 et 7h17 est de 0,04

E) Les propositions A, B, C et D sont fausses

QRU 3

Dans l’heure où il se lève, après avoir trainé dans son lit un certain temps, Alexis se fait un café pour attaquer sa journée. Sachant que son réveil sonne à 7h00 et qu’il peut sortir du lit à tout moment entre 7 et 8h, donnez la réponse vraie :

A) La probabilité qu’il se fasse un café à 7h20 pétantes est de 0,2

B) La probabilité qu’il se fasse un café entre 7h10 et 7h40 est de 0,5

C) La probabilité qu’il se fasse un café après 7h45 est de 0,75

D) La probabilité qu’il se fasse un café entre 7h13 et 7h17 est de 0,04

E) Les propositions A, B, C et D sont fausses

QRU 4

<u>QRU 10</u> : Au CHU Pasteur, on recense aujourd'hui 640 personnes hospitalisées en MCO (Médecine, Chirurgie, Odontologie), dont 20% de mineurs. Parmi tous les patients hospitalisés, on prélève un échantillon de 100 personnes. Quelle est la probabilité que dans cet échantillon, 40 soient âgés de moins de 18 ans ? Indiquez la proposition exacte :

A) $\frac{C_{128}^{40} \times C_{512}^{60}}{C_{640}^{100}}$
B) $C_{100}^{40} \times 0,2^{40} \times 0,8^{60}$
C) $C_{128}^{40} \times 0,2^{40} \times 0,8^{60}$
D) $\frac{C_{100}^{40} \times C_{640}^{128}}{C_{640}^{100}}$
E) Les propositions A, B, C et D sont fausses

QRU 4

QRU 10 : Au CHU Pasteur, on recense aujourd'hui 640 personnes hospitalisées en MCO (Médecine, Chirurgie, Odontologie), dont 20% de mineurs. Parmi tous les patients hospitalisés, on prélève un échantillon de 100 personnes. Quelle est la probabilité que dans cet échantillon, 40 soient âgés de moins de 18 ans ? Indiquez la proposition exacte :

A) $\frac{C_{128}^{40} \times C_{512}^{60}}{C_{640}^{100}}$

B) $C_{100}^{40} \times 0,2^{40} \times 0,8^{60}$

C) $C_{128}^{40} \times 0,2^{40} \times 0,8^{60}$

D) $\frac{C_{100}^{40} \times C_{640}^{128}}{C_{640}^{100}}$

E) Les propositions A, B, C et D sont fausses

QRU 5

<u>QRU 8</u> : Un examen est composé de 10 questions à réponse unique, comportant chacune 5 propositions. Tu voudrais impasser cette matière, et tu cherches donc la probabilité d'obtenir une bonne note en répondant au hasard. Quelle est la probabilité d'obtenir 6/10 ? Indiquez la proposition exacte :

A) 0,1
B) $0{,}2^6$
C) $\frac{10!}{6!4!}$
D) $0{,}2^6 \times 0,8^4$
E) Les propositions A, B, C et D sont fausses

QRU 5

<u>QRU 8</u> : Un examen est composé de 10 questions à réponse unique, comportant chacune 5 propositions. Tu voudrais impasser cette matière, et tu cherches donc la probabilité d'obtenir une bonne note en répondant au hasard. Quelle est la probabilité d'obtenir 6/10 ? Indiquez la proposition exacte :

A) 0,1
B) $0{,}2^6$
C) $\frac{10!}{6!4!}$
D) $0{,}2^6 \times 0,8^4$
E) Les propositions A, B, C et D sont fausses

Dénombrement

les 4 questions fantastiques

- tirage avec remise ?
- tirage ordonné ?
- tirage jusqu'à épuisement ?
- tirage avec catégories ?

Tirage avec remise ?

si oui, une seule possibilité : p-liste avec remise

$$Card(E)^p$$

rappel : p-liste avec remise = arrangement avec répétition

Tirage ordonné ?

si non, une seule possibilité : combinaison

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Tirage jusqu'à épuisement ?

si non, une seule possibilité : arrangement sans répétition

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Tirage avec catégories ?

si oui, une seule possibilité : permutation avec répétition

$$\frac{n!}{k_1! \times \ldots \times k_x!}$$

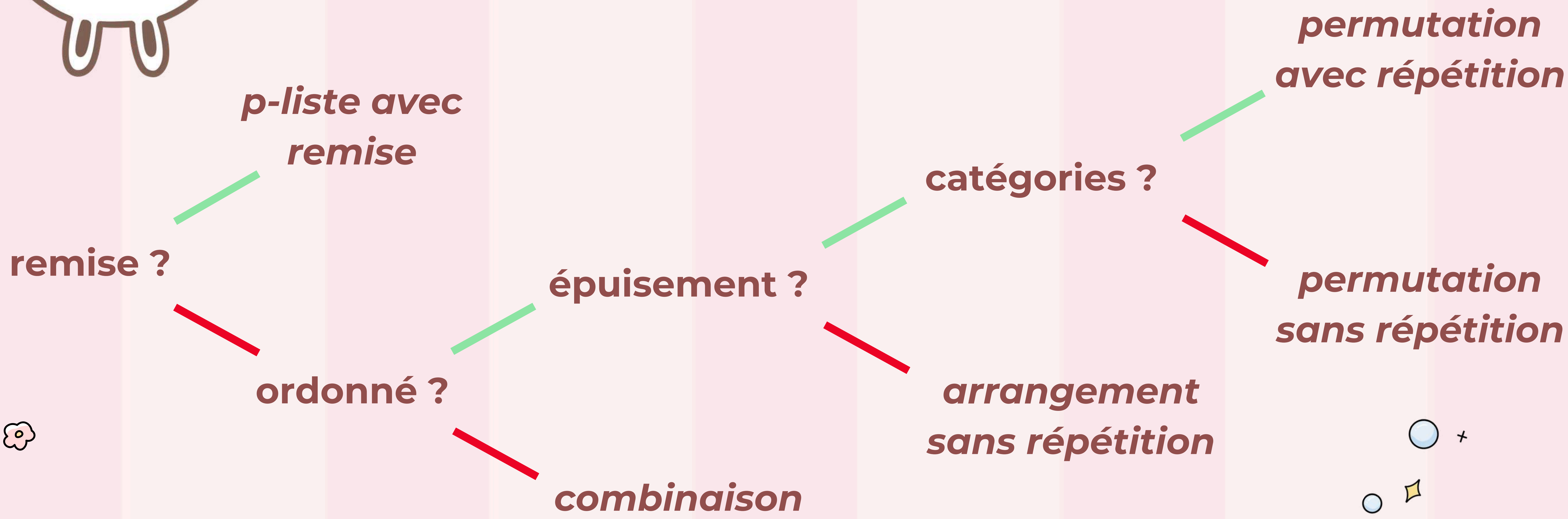
Tirage avec catégories ?

si non, une seule possibilité : permutation sans répétition

$$n!$$

ps : cela vient directement de la
formule de l’arrangement sans répétition

Récap


remise ?
p-liste avec remise
ordonné ?
épuisement ?
combinaison
catégories ?
arrangement sans répétition
permutation avec répétition
permutation sans répétition

inspiré d'annales !

QRU 1

dans le cadre de leur 1er DS en MPSI, les étudiants doivent choisir 6 questions parmi les 10 proposées. Indiquez le nombre de choix possibles pour chaque étudiant :

A) 10^6
B) 10! / 6!
C) 10! / (6!×4!)
D) 6! / 10!
E) les propositions A, B, C et D sont fausses

inspiré d'annales !

QRU 1

dans le cadre de leur 1er DS en MPSI, les étudiants doivent choisir 6 questions parmi les 10 proposées. Indiquez le nombre de choix possibles pour chaque étudiant :

A) 10^6
B) 10! / 6!
C) 10! / (6!×4!)
D) 6! / 10!
E) les propositions A, B, C et D sont fausses

inspiré d'annales !

QRU 2

le responsable de la sécurité de la faculté doit mettre en place un dispositif d'identification par code à 5 chiffres en raison d'événements récents impliquant un étudiant problématique. sachant qu'un chiffre ne peut pas être présent plusieurs fois dans un même code, indiquez le nombre de codes possibles.

A) 10! / 5!
B) 9! / 5!
C) 10! / (5!×5!)
D) 9! / (5!×4!)
E) les propositions A, B, C et D sont fausses

inspiré d'annales !

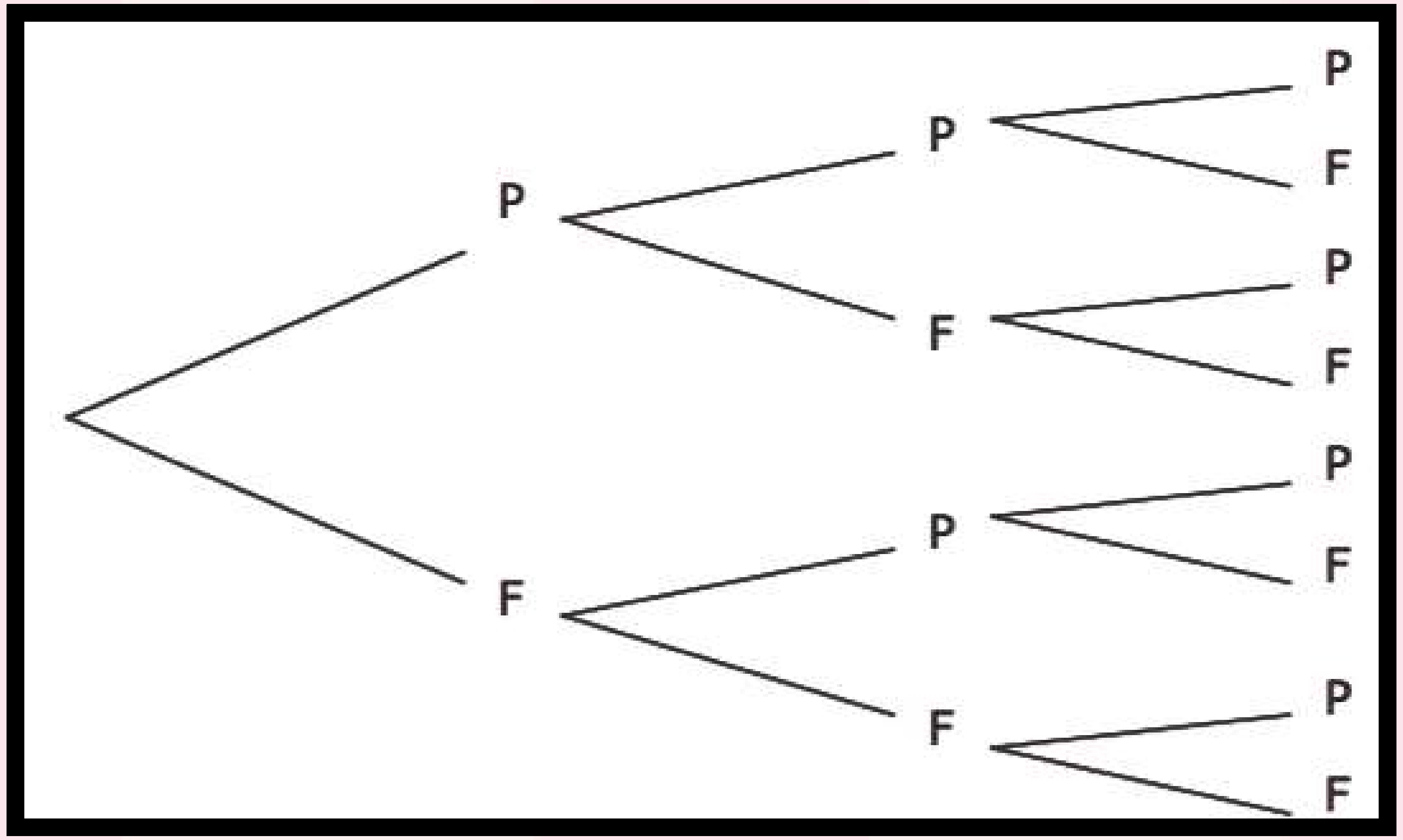
QRU 2

le responsable de la sécurité de la faculté doit mettre en place un dispositif d'identification par code à 5 chiffres en raison d'événements récents impliquant un étudiant problématique. sachant qu'un chiffre ne peut pas être présent plusieurs fois dans un même code, indiquez le nombre de codes possibles.

A) 10! / 5!
B) 9! / 5!
C) 10! / (5!×5!)
D) 9! / (5!×4!)
E) les propositions A, B, C et D sont fausses

Arbre de probabilité (1)

un outil indispensable en probas conditionnelles



Arbre de probabilité (2)

2 théorèmes importants :

- **théorème des probabilités totales**

$$P(B) = P(B \cap A_1) + \ldots + P(B \cap A_n)$$

- **théorème de la multiplication**

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \times \ldots \times P_{(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})}(A_n)$$

inspiré d'annales !

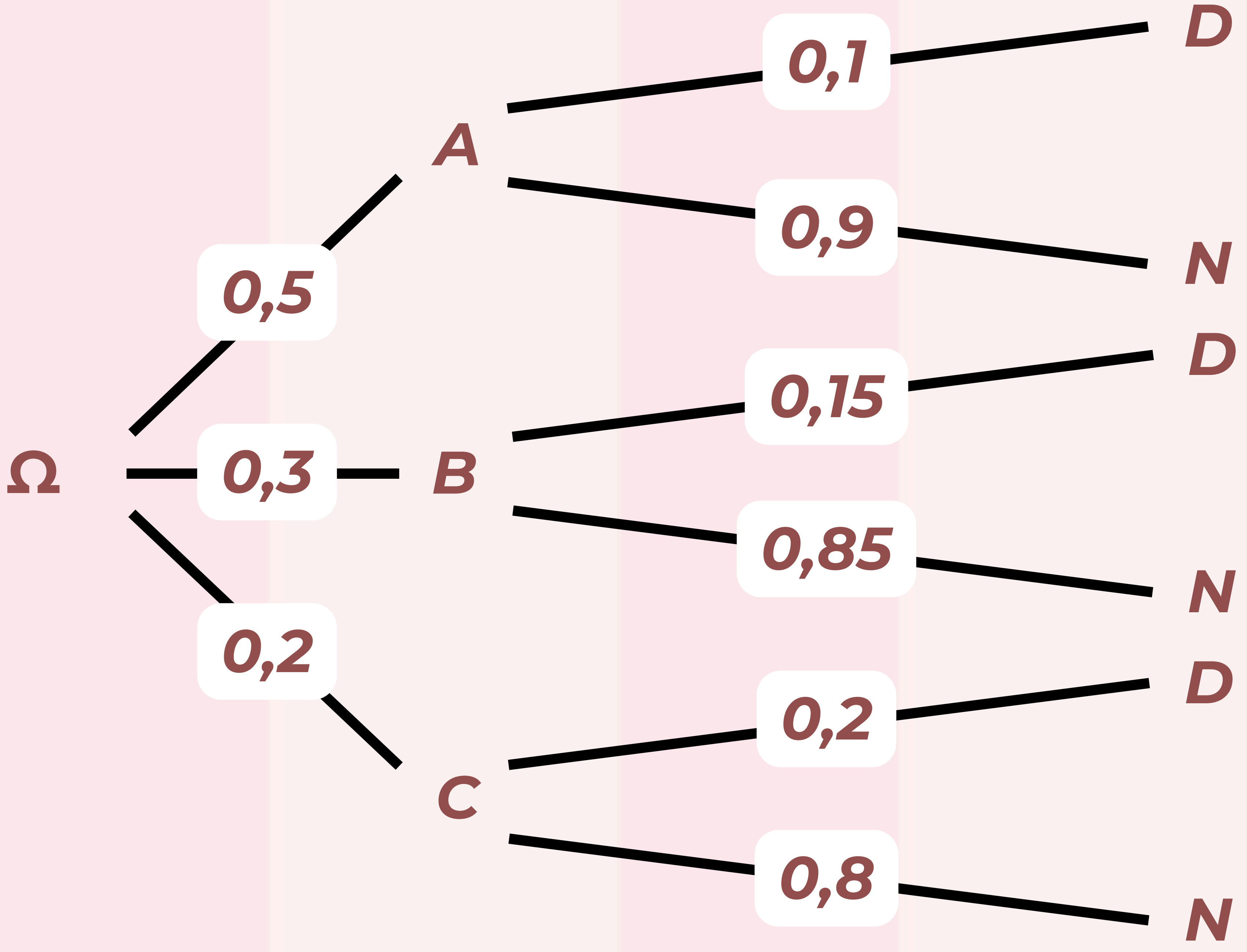
Exemple 1

Exemple : on s'intéresse à 3 fabricants de seringues (*A*, *B* et *C*). les probabilités qu'une seringue soit défecteuse sachant qu'elle est issue des fabricants *A*, *B* et *C* sont respectivement de 10%, 15% et 20%. au sein du lot suivant, quelle est la probabilité qu'une seringue soit défectueuse ?

contenu du lot : 5 seringues *A*, 3 seringues *B* et 2 seringues C

inspiré d'annales !

Exemple 1



théorème des probabilités totales :

$$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D)$$

théorème de la multiplication :

$$P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D)$$

$$P(B \cap D) = P(B) \times P_B(D)$$

$$P(C \cap D) = P(C) \times P_C(D)$$

résultat :

$$\begin{aligned} P(D) &= 0,5 \times 0,1 + 0,3 \times 0,15 + 0,2 \times 0,2 \\ &= 0,135 \end{aligned}$$

Théorème de Bayes

++ la formule à maîtriser en probas conditionnelles ++

$$P_B\left(A_i\right)=\frac{P\left(A_i\right)\times P_{A_i}\left(B\right)}{P\left(A_1\right)\times P_{A_1}\left(B\right)+\ldots+P\left(A_n\right)\times P_{A_n}\left(B\right)}$$

Exemple 2

<u>Exemple</u> : on reprend notre étude des seringues. en tirant au hasard au sein de ce lot, on tombe malheureusement sur une seringue défectueuse. quelle est la probabilité que cette seringue soit issue du fabricant A :

<u>données</u> :

$$P(A) = 0,5 \quad ; \quad P(B) = 0,3 \quad ; \quad P(C) = 0,2 \quad ; \quad P(D \mid A) = 0,1 \quad ;$$
$$P(D \mid B) = 0,15 \quad ; \quad P(D \mid C) = 0,2$$

Exemple 2

théorème de Bayes :

$$P_D(A) = \frac{P(A) \times P_A(D)}{P(A) \times P_A(D) + P(B) \times P_B(D) + P(C) \times P_C(D)}$$

résultat :

$$P_D(A) = \frac{0,5 \times 0,1}{0,5 \times 0,1 + 0,3 \times 0,15 + 0,2 \times 0,2} = \frac{0,05}{0,135} \approx 0,37$$

Merci à tous