

**VARIABLES  
ALÉATOIRES ET  
LOIS DE  
PROBABILITÉ**



# Sommaire



- ✓ Définitions
- ✓ Variables aléatoires discrètes
  - Lois de probabilité discrètes
    - Loi de Bernoulli
    - Loi binomiale
    - Loi géométrique
    - Loi hypergéométrique
    - Loi de Poisson
- ✓ Variables aléatoires continues
  - Lois de probabilité continues
    - Loi exponentielle
    - Loi uniforme
    - Loi normale
    - Loi normale centrée réduite
- ✓ Approximations

Voici ma dernière fiche de cours complète :(((

Les rajouts concernent surtout les lois de probabilité continues : formules des fonctions de densité et de répartition. En ce qui concerne ce que vous devez retenir de cela, je vous conseille d'apprendre les formules de la loi exponentielle et de la loi uniforme (pour les fonctions de répartition → surtout la fin de la formule car c'est ce qu'on applique concrètement). Je ne pense pas par exemple que la fonction de densité de la loi normale va tomber...

Bon courage les loulous vous êtes les meilleurs !!

## DÉFINITIONS

L'un des enjeux et ses conséquences que nous avons énoncé lors du cours sur les probabilités était que les observations pratiquées sur notre monde ne concerne pas un seul individu, mais une **population d'individus**. Nous ne pouvons pas dans la plupart des cas observer tous les individus de la population et que nous devons travailler sur un échantillon. Il nous faut donc résoudre un aspect méthodologique : les caractéristiques varient d'un individu à l'autre, mais dans quelle mesure ?

Une **variable aléatoire** (VA) est une **épreuve menant à des évènements élémentaires** qui sont des **nombres**. Autrement dit, on décrit une **opération précise** menant à un **résultat aléatoire**. *Pour faire simple, une VA est une fonction qui va associer à chaque évènement d'une épreuve, une valeur réelle, un **nombre**. Par exemple, une VA va nous permettre de calculer les probabilités de tomber sur chacune des faces d'un dé (résultats de 1 à 6) mais pas celles d'un jeu de cartes (les évènements ne sont pas des nombres).*

On distingue 2 types de variables aléatoires :

- **Discrète** → le résultat fait partie d'un ensemble fini ou dénombrable

*Exemple : le nombre de pages dans les ronéos de biophy*

- **Continue** (ou VA à densité) → le résultat est compris dans  $\mathbb{R}$  ou un intervalle de  $\mathbb{R}$

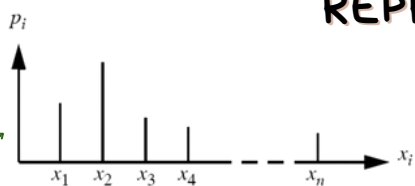
*Exemple : dosage de la glycémie*

## VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

La loi de probabilité d'une **variable aléatoire X discrète** est définie en donnant l'ensemble des valeurs  $p_1, p_2, \dots, p_n$  correspondant aux **probabilités** de ses différentes **éventualités**  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Soit pour tout  $i$ ,  $p_i = P(X = x_i)$  donc  $0 \leq p_i \leq 1$  (pour rappel :  $\sum p_i = 1$ ).

### REPRÉSENTATION GRAPHIQUE



**Diagramme en bâtons**



$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_n$	$\dots$
$p_1$	$p_2$	$\dots$	$p_n$	$\dots$

**Table**

la hauteur du bâton positionné en  $x_i$  a pour valeur  $p_i$

Tout au long du cours nous allons utiliser des paramètres qui seront propres à chaque loi de probabilité, faisons un petit rappel :

## → Moyenne

La moyenne  $\mu$  de la variable aléatoire  $X$  est un **indicateur de position** (elle va résumer la tendance centrale en indiquant où se trouve typiquement la valeur moyenne des observations.)

$$\mu = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n = \sum_{i=1}^{i=n} x_i p_i$$

## → Espérance

L'espérance  $E(X)$  est un **synonyme de la moyenne** en probabilités et statistiques (c'est la valeur qu'on « espère » obtenir au bout d'un nombre infini de répétitions d'une expérience aléatoire, qui se trouve être égale à la moyenne).

### THÉORÈMES DE L'ESPÉRANCE

☞ Soit  $X$  une variable aléatoire et  $k$  une constante réelle

$$\left[ \begin{array}{l} E(kX) = kE(X) \\ E(X + k) = E(X) + k \end{array} \right]$$

☞ Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

On peut généraliser cette formule en disant que **l'espérance de la somme est la somme des espérances**.

## → Variance et écart-type

La variance  $\sigma^2$  est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne. L'écart-type  $\sigma$  est sa racine carrée. Ce sont des **paramètres de dispersion** (ils vont donner une idée d'à quel point les valeurs sont éloignées de la moyenne, à quel point elles sont dispersées autour d'elle)

$$\sigma^2 = Var(X) = \sum_{i=1}^{i=n} p_i (x_i - \mu)^2$$

$$\sigma^2 = Var(X) = E(X - \mu)^2 = E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2) - \mu^2$$

Comme dans le théorème de l'espérance → soit  $a$  une constante on a :

$$\left[ \begin{array}{l} Var(aX) = a^2 Var(X) \\ Var(a + X) = Var(X) \end{array} \right]$$

**Remarque :** Les variances de valeurs données en C° ou en K sont donc les **mêmes** si elles correspondent aux mêmes températures

## → Variable centrée réduite

C'est un type de manipulation qu'on effectue sur des variables; c'est développé dans la suite du cours. Une variable centrée réduite est dite centrée car on lui **soustrait sa moyenne**, et réduite car on la **divise par son écart-type**.

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

On a alors :

- $E(Y) = \mu = 0$
- $\text{Var}(Y) = \sigma^2 = \sigma = 1$

## → Fonction de répartition

C'est une fonction dite **cumulative** car on additionne toutes les probabilités ( $p_i$ ) des  $x_i$  survenus avant  $x$ . On la définit donc comme  **$F(x) = P(X \leq x)$**  (pour tout  $x$  appartenant à  $\mathbb{R}$ ) Cette fonction est toujours monotone (elle n'évolue que dans un sens, une direction) **croissante**.

Avec  $X$  une variable aléatoire discrète : 
$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i) = \sum_{x_i \leq x} p_i$$

**Exemple :** dans un lancer de dé, la fonction de répartition donnera la probabilité d'obtenir un chiffre inférieur ou égal à 2 (c'est-à-dire la proba de tirer un 1 + la proba de tirer un 2)

Dans tous les cas,  $F(x)$  est une fonction monotone croissante, c'est-à-dire que si  $a \geq b$  alors  $F(a) \geq F(b)$ . De plus :

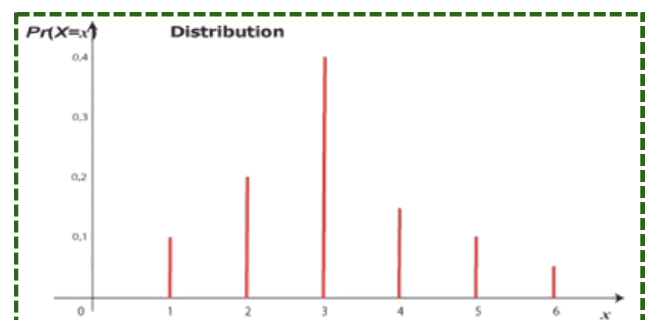
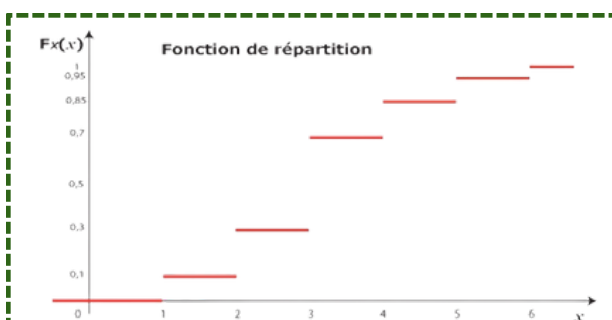
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

C'est logique, les probabilités sont comprises entre 0 et 1; ce sont donc les limites



**Bien distinguer fonction de répartition et fonction de distribution !**



*La fonction de distribution n'est pas cumulative; elle illustre simplement les probabilités individuelles des évènements élémentaires.*

Pour les variables aléatoires discrètes, la fonction de **répartition** est une **fonction en escalier**. Les discontinuités de  $x$  se produisent pour des valeurs de  $x$  ayant des probabilités non nulles. La hauteur de la discontinuité est la probabilité de  $X=x$ .

**Exemple**: obtenir 2 → **distribution**; obtenir 2 ou moins → **répartition**

## LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES

Pour chaque type de VA, nous allons voir des lois de probabilité qui leur sont associées : en effet, elles sont à utiliser dans certaines situations et ce qui est important à savoir c'est dans quelle situation utiliser quelle loi ?



### Loi de Bernoulli B(p)

La loi de Bernoulli est utilisée lors de la réalisation d'une **épreuve de Bernoulli** : une **expérience aléatoire** donc l'issue est un "**succès**" ou un "**échec**".

#### Paramètres

- **p** : probabilité d'un succès
- **q = 1 - p** : probabilité d'un échec
- **X** : variable aléatoire « nombre de succès » lors d'une épreuve

$$P(X = k) = p^k (1 - p)^{1-k} = p^k q^{1-k} \quad \text{pour } k \in \{0, 1\}$$

$$\mu = p$$

$$\sigma^2 = p(1 - p) = pq$$

**Exemple** : On a une boîte avec 2 boules rouges et 6 boules noires. Soit l'évènement « tirer une boule noire » le succès. Quelle est la probabilité d'avoir un succès ? La probabilité de n'en avoir aucun ?

On suit la loi de Bernoulli (épreuve aléatoire, 2 issues : succès ou échec), donc :

$$p = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \quad P(X = 0) = \frac{3^0}{4} \frac{1^1}{4} = \frac{1}{4} \quad P(X = 1) = \frac{3^1}{4} \frac{1^0}{4} = \frac{3}{4}$$



## Loi binomiale $B(n;p)$



La loi binomiale consiste en la **répétition d'épreuves de Bernoulli** : on répète  $n$  fois des essais indépendants d'une même expérience aléatoire dont l'issue est soit un « succès », soit un « échec ».

### Paramètres:

- $n$  : nombre d'essais indépendants
- $p$  : probabilité d'un succès
- $q$  : probabilité d'un échec
- $X$  : variable aléatoire « nombre de succès » à l'issue de essais

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k} \quad \text{pour } 0 \leq k \leq n$$

### Point'tut : la combinaison

$$C_n^k = \frac{n!}{k! (n - k)!} \quad \text{avec } n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 2 \times 1$$



$$\mu = np$$



$$\sigma^2 = np(1 - p) = npq$$

**Exemple :** On reprend une boîte avec cette fois 4 boules rouges et 6 noires. Soit l'évènement "tirer une boule noire" le succès. On tire trois fois une boule dans cette boîte et chaque tirage est indépendant des autres. On cherche la probabilité de tirer une boule noire soit  $P(X=1)$ .

Données :  $k=1$  ;  $n=3$  ;  $p=6/10$  ;  $q=4/10$

$$P(X = 1) = C_3^1 \times \left(\frac{6}{10}\right)^1 \times \left(\frac{4}{10}\right)^2 = \frac{3!}{2!1!} \times 0,6 \times 0,16 = 3 \times 0,096 = 0,288$$

### → Propriétés et particularités

Si deux variables binomiales sont indépendantes et ont le même paramètre  $p$ , **leur somme suit encore une loi binomiale**. Le nombre d'essais s'additionne simplement :  **$n_1+n_2$** . (Cela vaut aussi pour la loi de Poisson)

La propriété est donc pratique pour additionner des comptages du même type, comme le nombre total de pièces défectueuses dans un échantillon.

La loi binomiale repose sur le principe de **tirage non exhaustif** (indépendants des autres tirages) c'est-à-dire que les éléments sélectionnés sont remis dans l'échantillon, donc  $p$  ne varie pas.

Or, *en pratique*, le tirage est plutôt **exhaustif** (dépendant des autres) : il est sans remise (*car on pioche des individus pour créer notre échantillon, donc la population varie*) donc  $p$  varie au fil des tirages.

On définit donc le **taux de sondage  $n/N$**  avec  $n$  la taille de l'échantillon et  $N$  la taille de la population.

- Si  $n/N \leq 0,1$  on applique la loi binomiale (même avec tirage exhaustif)
- Si  $n/N > 0,1$  (*donc si l'échantillon est suffisamment grand*) on applique la **loi hypergéométrique**

La forme du diagramme de probabilités d'une **distribution normale** est **symétrique** si  $p = 0,50$ , et ce pour tout  $n$ .

Si  $p \neq 0,50$ , alors :

- **Asymétrie positive** pour  $p > 0,50$
- **Asymétrie négative** pour  $p < 0,50$

La forme devient symétrique quand  $n$  est grand.

→ Si  **$n$  est grand** et si  **$p$  n'est pas trop proche de 0 ou de 1**, alors **la loi binomiale tend vers la loi normale**.



La loi géométrique consiste en la **répétition d'épreuves de Bernoulli jusqu'à l'obtention d'un succès**.

On l'utilise pour étudier l'efficacité d'une carte de contrôle dans un dispositif de surveillance d'un processus de production.

#### Paramètres:

- **$p$**  : probabilité d'un succès
- **$q$**  : probabilité d'un échec
- **$X$**  : variable aléatoire « nombre d'essais nécessaires jusqu'à l'obtention du 1er succès »

$$P(X = k) = p(1 - p)^{k-1} = pq^{k-1}$$

pour  $k \in \mathbb{N}^*$



$$\mu = 1/p$$



$$\sigma^2 = \frac{1-p}{p^2}$$

**Exemple :** On lance un dé à six faces jusqu'à obtenir un "6". Quelle est la probabilité d'obtenir un "6" au bout de 3 essais ?

$$P(X = 3) = \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{216}$$



### Loi hypergéométrique $H(N;D;n)$



La loi hypergéométrique est utilisée lorsqu'on prélève un **échantillon** dans une **population** où une certaine proportion a une **caractéristique** qu'on cherche. Cette loi nous permet de calculer la probabilité qu'une certaine partie de l'échantillon ait cette caractéristique. Soit une population de **N individus** parmi lesquels **D** ont un caractère donné. On prélève un **échantillon** de taille **n**, sans remise, soit au fur et à mesure, soit d'un seul coup. On l'utilise dans la réception de plans d'échantillonnage pour le contrôle de réception.

#### Paramètres:

- **N** : effectif de la population
- **n** : effectif de l'échantillon
- **D** : nombre d'individus/objets avec la caractéristique donnée
- **p = D/N** : probabilité d'avoir la caractéristique donnée au sein de la population
- **q = 1-p** : probabilité de ne pas avoir la caractéristique
- **X** : variable aléatoire du nombre d'individus de l'échantillon possédant la propriété recherchée

$$P(X = k) = \frac{C_D^k \times C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}$$



$$\mu = \frac{nD}{N} = np$$



$$\sigma^2 = \frac{nD}{N} \times \frac{N-D}{N} \times \frac{N-n}{N-1} = \left(\frac{N-n}{N-1}\right) npq$$

avec  $\min(0; n - D) \leq k \leq \max(n; D)$

**Remarque** : si on regarde la moyenne et la variance, on comprend mieux les **propriétés de la loi binomiale** : en effet, la loi hypergéométrique à presque le même  $\mu$  et  $\sigma^2$  à la différence du facteur entre parenthèse  $(N-n)/(N-1)$ . Or, si on se trouve dans une situation avec un échantillon de faible effectif  $n$  dans une grande population  $N$ , on réalise que ce facteur **tend vers 1**, donc les paramètres sont ceux de la loi binomiale. D'où le fait qu'on utilise l'une ou l'autre selon le taux de sondage.

**Exemple** : Dans une usine, il y a 1000 machines dont 200 ont des défauts. On tire au sort 300 machines dans cette population. Quelle est la probabilité que la moitié de cet échantillon ait des défauts ?

Données :

- $k = 150$ ;  $D = 200$
- $n = 300$ ;  $N = 1000$

$$P(X = 150) = \frac{C_{200}^{150} \times C_{800}^{150}}{C_{1000}^{300}}$$



Loi de Poisson  $P(\lambda)$



La loi de Poisson est utilisée pour déterminer la **probabilité qu'un certain nombre d'évènements interviennent sur la base d'une unité** (de temps généralement). *Elle modélise des phénomènes aléatoires où les évènements se réalisent sur la base d'une unité de temps, de volume, de surface...*

On la retrouve souvent dans les domaines de la qualité, la sécurité, la fiabilité.

**Paramètres:**

- $\lambda$  : taux moyen avec lequel un évènement particulier apparaît
- $X$  : variable aléatoire qui donne le nombre d'évènements qui se produisent dans la situation étudiée

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

avec  $\lambda > 0$ ,  $k \in \mathbb{N}$  et  $e = 2,71828\dots$



$$\mu = \sigma^2 = \lambda$$

**Exemple** : Dans le cabinet d'un dermatologue, on a en moyenne quatre consultations en deux heures. Quelle est la probabilité d'avoir une consultation au cours d'une heure ?

$\lambda = 2$  (hospitalisations pour 1h)

$$P(X = 1) = \frac{2 \times e^{-2}}{1!} = 2e^{-2}$$

## VARIABLES ALÉATOIRES CONTINUES

Une variable aléatoire continue a une **probabilité nulle d'être égale à un nombre donné**. Traduction : elle prend une valeur comprise entre deux valeurs  $a$  et  $b \rightarrow$  la proba qu'une VA continue soit égale à un nombre précis, exactement déterminé, est nulle. Exemple : la proba de tirer au sort dans une pop un homme qui pèse exactement 99,999...99kg est nulle. C'est pourquoi les lois de probabilités d'une VA continue ne peuvent **pas** être définies en listant les probabilités de toutes les éventualités puisqu'elles sont toutes nulles. En revanche, on sait parler de probabilité pour qu'une **variable X prenne une valeur comprise entre a et b**. On note cette probabilité  **$P(a \leq X \leq b)$**  ou  $P(X \in [a; b])$ .

De fait :

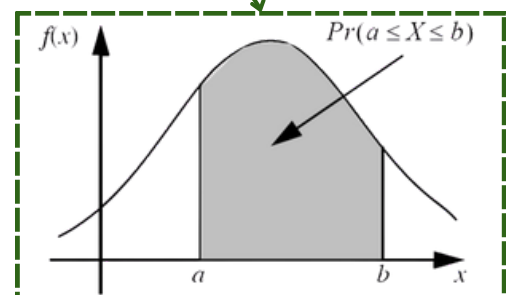
$$P(X=4) = 0; P(X=11,22) = 0, P(X=\sqrt{2}) = 0$$

On utilise donc des intervalles  $\rightarrow P(a \leq X \leq b) \neq 0$

### ➔ Densité de probabilité

Soit **X** une variable aléatoire continue prenant des valeurs comprises entre a et b (a et b étant éventuellement infinis).

On définit la loi de probabilité de X, ou de distribution de X à l'aide de la **fonction  $f(x)$**  appelée **densité de probabilité de x** telle que si f est donnée, la probabilité  **$P(a \leq X \leq b)$**  est la surface sous la courbe entre a et b.



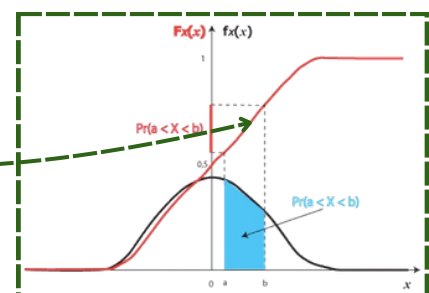
$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

### ➔ Fonction de répartition

Tout comme les VA discrètes, les VA continues possèdent une **fonction de répartition** (en rouge). Elle est, elle aussi, **cumulative, toujours croissante, monotone** mais cette fois **continue** ( $\neq$  escaliers).

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$



## Récapitulatif

Les propriétés de la fonction de répartition sont conservées :

➤ **Fonction monotone croissante** (mais plus par paliers...)

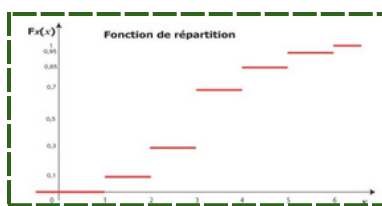
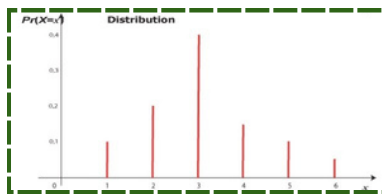
➤ **Partant de 0** pour  $x \rightarrow -\infty$

➤ **Et atteignant 1** pour  $x \rightarrow +\infty$

➤  $F(X) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$  (analogue à  $\sum_{x_i \leq x_n} p_i$ )

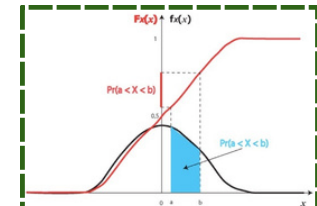
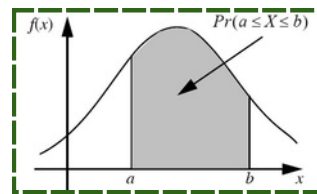
➤  $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

### VA discrète



$$P(x_k \leq X \leq x_n) = \sum_{i=k}^{i=n} p_i$$

### VA continue



$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

Pour résumer l'analogie entre le cas discret et le cas continu, un **point** du domaine discret correspond à un **intervalle** dans le cas continu, la **somme discrète** correspond à **l'intégrale**.

## LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES



### Loi exponentielle



La loi exponentielle illustre un processus de mortalité dans lequel le « **risque instantané** » (ou **taux de défaillance**) de décès est constant (durée de vie des composants ou d'équipements). *En d'autres termes, elle décrit un phénomène où la probabilité qu'un évènement survienne reste toujours constante dans le temps.*

C'est-à-dire que le risque instantané ne change pas avec la durée écoulée (pas de phénomène de vieillissement ou d'usure).

Exemple : la radioactivité. Lors de la décroissance radioactive d'un noyau, que ce dernier ait par exemple 10 ans ou bien 100000 ans, il aura toujours la même probabilité de se désintégrer : le **taux de défaillance** (ici le taux de désintégration) ne varie pas, il est **constant**.

### Paramètres:

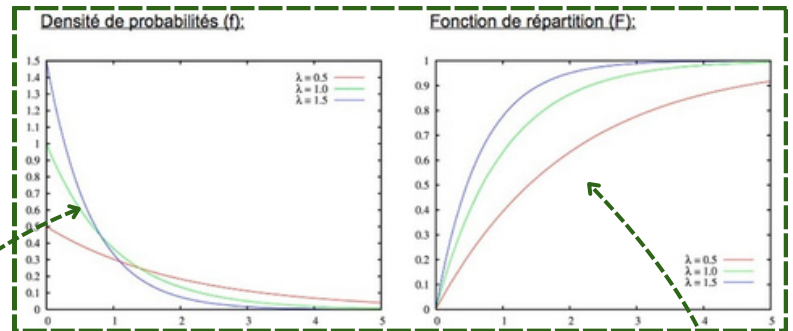
- $\lambda$  : taux de défaillance instantanée



$$\mu = 1/\lambda$$



$$\sigma^2 = 1/\lambda^2$$



Fonction de densité :

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{avec } \lambda > 0 \text{ et } x \geq 0$$

Fonction de répartition :

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}$$

### Point'tut : la loi de Poisson et la loi exponentielle

Les deux lois modélisent des phénomènes très similaires, mais les probabilités qui y sont rattachées sont en réalité **inverses** l'une vis-à-vis de l'autre !

Elles ont en effet le même paramètre, mais leurs moyennes sont des inverses :

- Pour la loi de Poisson :  $\mu = \lambda$
- Pour la loi exponentielle :  $\mu = 1/\lambda$

De plus, la variance de la loi exponentielle est  $\sigma^2 = 1/\lambda^2$ , alors que chez Poisson  $\mu = \sigma^2 = \lambda$ .

Concrètement, on démontre que **si un évènement se réalise selon une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$** , le temps entre deux réalisations consécutives de l'évènement considéré est distribué selon une **loi exponentielle de paramètre  $1/\lambda$** .

- **Loi de Poisson** → **nombre d'évènements** dans un intervalle de temps donné
- **Loi exponentielle** → **temps** entre deux évènements consécutifs



## Loi uniforme



La loi uniforme décrit une situation où **chaque point de l'intervalle [a;b] a la même probabilité** (= même densité). Il s'agit du modèle où **tout est équiprobable**.

### Paramètres:

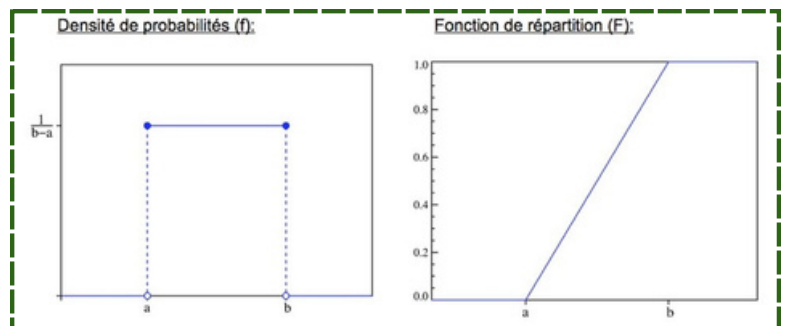
- Intervalle [a;b] appartenant à  $\mathbb{R}$



$$\mu = (a + b)/2$$



$$\sigma^2 = (b - a)^2/12$$



Fonction de densité :

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

si  $x \in [a;b]$  et  $f(x) = 0$  si  $x \notin [a;b]$   
avec  $\lambda > 0$  et  $x \geq 0$

Fonction de répartition :

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} dt = \frac{x-a}{b-a}$$

**Exemple :** Le boulanger prépare toujours ses croissants avant l'ouverture de la boulangerie. La préparation des croissants se déroule de 06h00 à 07h00. Soit l'évènement "les croissants sont prêts". Quelle est la probabilité que les croissants soient prêts au moins 15 minutes avant l'ouverture ?

La probabilité de l'évènement est définie par une loi uniforme [06:00;07:00]

$$\int_6^{6,75} \frac{1}{7-6} dx = \frac{6,75-6}{7-6} = 0,75$$

Il y a  $\frac{3}{4}$  chances qu'ils soient prêts  $\frac{1}{4}$  d'h avant



## Loi normale

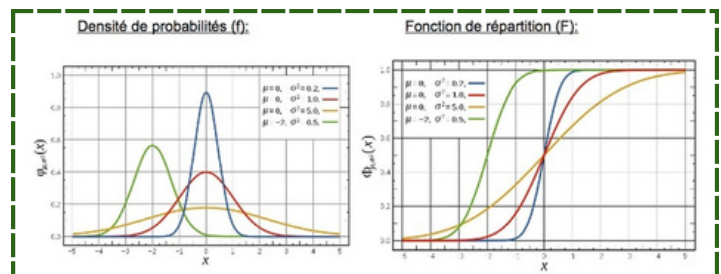


La loi normale ou **loi de Gauss** décrit des phénomènes où la **plupart des valeurs se trouvent autour de la moyenne** et les **valeurs plus extrêmes sont plus rares**. *D'où son nom, elle décrit un phénomène où la majorité des événements observés sont dans une "norme". Elle est facilement identifiable avec sa forme de **cloche symétrique**, plus ou moins aplatie (densité de probabilité). Là où elle est la plus dense, c'est au sommet, et c'est là où se trouve la moyenne.*

La loi normale sert tout le temps. Par exemple, les bilans biologiques effectués dans les laboratoires d'analyses médicales sont effectués grâce à des appareils de mesure qui ont une erreur de mesure qui est quantifiée grâce à la loi normale.

### Paramètres:

- $\mu$  : moyenne de X
- $\sigma$  : écart-type de X



Fonction de densité :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Elle est définie pour  $-\infty \leq x \leq +\infty$

La densité de probabilité d'une VA normale de moyenne  $\mu$  et d'écart-type  $\sigma$  est symétrique autour de  $\mu$  et a **deux points d'inflexion** aux abscisses  $\mu - \sigma$  et  $\mu + \sigma$ .

### → Particularités

- Il y a **10 chances sur 100** pour que  $X < \mu - 1,65\sigma$  ou  $X > \mu + 1,65\sigma$
- Il y a **5 chances sur 100** pour que  $X < \mu - 1,96\sigma$  ou  $X > \mu + 1,96\sigma$
- Il y a **1 chance sur 100** pour que  $X < \mu - 2,58\sigma$  ou  $X > \mu + 2,58\sigma$
- Il y a **1 chance sur 1000** pour que  $X < \mu - 3,30\sigma$  ou  $X > \mu + 3,30\sigma$

Dans la plupart des applications statistiques de la loi normale (en particulier les tests statistiques), on se servira de la seconde ligne : une variable aléatoire distribuée normalement a **5 chances sur 100** de présenter un écart à la moyenne supérieur à **1,96 $\sigma$**  (on arrondit généralement à **2**).

**Point'tut : la loi normale**

“Il y a **10 chances sur 100** pour que  $X < \mu - 1,65\sigma$  ou  $X > \mu + 1,65\sigma$ ”

Qu'est ce que ça veut dire ? Ca veut dire que **90%** de la population qu'on étudie, où de manière générale, des résultats qu'on obtient, vont se trouver dans un **intervalle** qui est compris entre la moyenne - 1,65 écart-type, et la moyenne + 1,65 écart-type. Ce qui se trouve en dehors de ces limites, c'est les **10 chances sur 100**, les cas plus rares, qu'on retrouve moins souvent.

Entre les différents points, ce qui change c'est le **coefficient** devant l'écart-type. (Logique, l'écart-type est un indicateur de dispersion, donc il va nous dire si on est plus ou moins éloigné de la moyenne.) Et donc plus  $\sigma$  est grand, c'est-à-dire plus on le multiplie par un **grand coefficient** comme **3,30**, plus on va se retrouver dans des **valeurs extrêmes**, qu'on rencontre **très rarement**, si rarement qu'on a par exemple 1 chance sur 1000 de les rencontrer.

Dans la plupart des applications statistiques de la loi normale (en particulier les tests statistiques), on se servira de la seconde ligne : une VA distribuée normalement a **5 chances sur 100** de présenter un écart à la moyenne +/- **1,96 $\sigma$**  (arrondi à 2).

**Exemple** : Le poids des LAS se répartit selon une loi normale  $N(\mu;\sigma)$  avec  $\mu = 60\text{kg}$  et  $\sigma = 10\text{kg}$ .

- Ainsi, 95% des LAS pèsent entre ??? et ???

Réponse : **entre 40,4kg et 79,6kg**

$$\mu - 1,96\sigma = 60 - 1,96 \times 10 = 60 - 19,6 = 40,4$$

$$\mu + 1,96\sigma = 60 + 1,96 \times 10 = 60 + 19,6 = 79,6$$

**Exemple** : La taille “X” des hommes adultes suit une loi normale de moyenne  $\mu = 180$  cm et d'écart-type  $\sigma = 6$  cm.

- La proportion d'hommes dont la taille est supérieure à 189,9cm est ???

Réponse : **5%**

$$189,9 - \mu = 189,9 - 180 = 9,9$$

$$\frac{9,9}{\sigma} = \frac{9,9}{6} = 1,65$$

**Rappel** : La courbe de Gauss (représentation de la loi normale) est une **cloche symétrique**, donc quand on parle des valeurs extrêmes, elles sont des **deux côtés**. Donc dans les 10 chances sur 100, on en a “5 à droite et 5 à gauche”.



## Loi normale centrée réduite



La loi normale centrée réduite est une loi normale qu'on a simplifié, **ajusté** pour qu'elle ait une **moyenne de 0** et une **variance (ou écart-type) de 1**. *C'est une technique souvent utilisée dans les logiciels qui permet "d'uniformiser" des variables (comme la glycémie, la tension artérielle...), pour ne pas avoir pour chacune d'entre elles des tables et des courbes individuelles, mais au contraire seulement la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.*

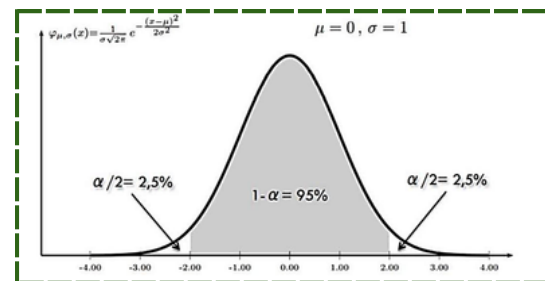
Ainsi, elle est :

- **Centrée** autour de la moyenne ( $\mu$ ).
- **Réduite** par l'écart-type ( $\sigma$ ).

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

**Paramètres:**

- $\mu = 0$  : moyenne
- $\sigma = 1$  : écart-type



## APPROXIMATIONS

*Je vous ai dit qu'il était important de savoir repérer quelle loi utiliser dans quel contexte. Cependant, il est possible que si certaines conditions sont réunies, vous devriez utiliser une loi plutôt qu'un autre : elle sera **approximée**.*

Lois	Conditions	Conséquences
Binomiale → Poisson	Si : → $n > 50$ → $p \leq 0,10$ → $np \leq 5$	$B(n;p) \rightarrow P(\lambda=np)$
Binomiale → Normale	Si : → $np \geq 5$ → $nq \geq 5$	$B(n;p) \rightarrow N(np; \sqrt{npq})$
Poisson → Normale	Si : → $\lambda > 25$	$P(\lambda) \rightarrow N(\lambda; \sqrt{\lambda})$

## Récapitulatif

Lois	Bernoulli	Binomiale	Géométrique	Hypergéométrique	Poisson
Situation de départ	<b>1 seule épreuve avec 2 issues</b> possibles (succès/échec)	<b>n épreuves de Bernoulli indépendantes</b> , identiques, à 2 issues	Epreuves de Bernoulli répétées <b>jusqu'au 1er succès</b>	<b>Tirage sans remise</b> (échantillon) dans une <b>population finie</b> de taille <b>N</b> avec <b>D</b> malades	<b>Nb d'évènements</b> rares, indépendants, dans un <b>intervalle</b> (temps...) fixe (avec <b>taux <math>\lambda</math></b> )
On calcule QUELLE PROBA ?	Proba d' <b>un succès</b> (ou échec) sur une <b>seule</b> épreuve	Proba d'avoir <b>k succès parmi n épreuves</b>	Proba que le <b>1er premier</b> succès arrive au bout du <b>k-ième essai</b>	Proba d'avoir <b>k "malades"</b> (ou "k" avec une caractéristique donnée) dans <b>l'échantillon</b>	Proba d'observer <b>k évènements</b> dans l'intervalle
Exemple	Un patient reçoit un traitement (TTT) : proba qu'il réponde au TTT (succès)	Sur n patients traités, proba que k répondent au TTT	Nb d'essais nécessaires jusqu'au 1er patient qui répond au TTT	Dans une pop avec N patients dont D sont malades, proba d'avoir k malades dans un échantillon de taille n	Proba qu'un médecin voie k urgences en 1h si le taux est $\lambda$ consultations/h

*Ce tableau vient de moi, pas du prof; à vous de voir si ça vous aide !*

*Si vous avez des questions ou des suggestions n'hésitez pas, bon courage pour cette dernière ligne droite !*