Correction du DM Annales : Variables aléatoires et lois de probabilité

1/	A	**2/**	A	**3/**	A	**4/**	B	**5/**	B
6/	C	**7/**	C	**8/**	C	**9/**	B	**10/**	B
11/	E	**12/**	D	**13/**	C	**14/**	C	**15/**	D
16/	B	**17/**	C	**18/**	E	**19/**	C	**20/**	A
21/	E	**22/**	C	**23/**	D	**24/**	C	**25/**	D

QRU 1 : A

A) Vrai : l'espérance (ou moyenne) d'une loi binomiale est égale à $\mu = np$. Ici $n = 20$ et $p = 0,5$ donc $\mu = 20 * 0,5 =$ **10**
B) Faux
C) Faux
D) Faux
E) Faux

QRU 2 : A

A) Vrai : c'est le schéma classique de la loi de Poisson
B) Faux : ça c'est la loi normale
C) Faux
D) Faux : ça c'est pour les lois basées sur une épreuve de Bernoulli (Bernoulli, binomiale, géométrique...)
E) Faux

QRU 3 : A

A) Vrai : la seule loi où la variance est égale à l'espérance est **la loi de Poisson**. Ici on nous demande le nombre moyen d'effets secondaires par jour c'est-à-dire la **moyenne** ou tout simplement le **taux lambda** (nombre moyen d'évènements par jour) donc **2,5**
B) Faux
C) Faux
D) Faux
E) Faux

QRU 4 : B

A) Faux
B) Vrai : pour rappel dans une loi normale centrée réduite la moyenne est $m = 0$ et l'écart-type est $s = 1$. Si X est compris entre -1 et 1 c'est qu'on multiplie donc l'écart-type par **1**. Si on se réfère aux propriétés de la loi normale, on sait que dans l'intervalle **[m – 1s ; m + 1s]** on retrouve approximativement **68%** des valeurs.
C) Faux
D) Faux
E) Faux

QRU 5 : B

A) Faux
B) Vrai : texto cours formule d'une loi normale centrée réduite
C) Faux
D) Faux
E) Faux

QRU 6 : C

A) Faux : elle n'est JAMAIS asymétrique (c'est littéralement son principe)
B) Faux : ce n'est pas dit explicitement dans le cours mais comme elle est symétrique donc, sa moyenne est égale à sa médiane
C) Vrai : la moyenne est l'axe de symétrie de la courbe
D) Faux : ça c'est lorsqu'elle est centrée réduite
E) Faux

QRU 7 : C

A) Faux : [m-s ; m+s] contient **68,2%** de la population
B) Faux : cf item A. [m-1,96s ; m+1,96s] contient environ **95%** de la population
C) Vrai : [m-2,6s ; m+2,6s] contient plus exactement environ **99%** de la population, donc bien + de 90% de la population
D) Faux : cf item C
E) Faux

QRU 8 : C

A) Faux
B) Faux
C) Vrai : la proportion d'instruments défectueux est de 4/100 donc **p = 0,04** et **q = 0,96**. Ici nous sommes dans une situation de **loi binomiale** : on répète des épreuves de Bernoulli (qui est : avoir une intervention chirurgicale et utiliser un instrument) et on regarde si on a un succès (= tomber sur un instrument défectueux) ou un échec (= tomber sur un instrument correct). Ici on nous demande la probabilité de ne tomber sur AUCUN instrument défectueux donc **k = 0** (on souhaite 0 succès) au bout de 100 interventions indépendantes (donc **n = 100**). On applique ensuite la formule de la loi binomiale : $P(X = 0) = C_{100}^{0} \times 0{,}04^{0} \times 0{,}96^{100}$. Les deux premiers termes sont égaux à 1 donc on se retrouve seulement avec $\mathbf{0{,}96^{100}}$
D) Faux
E) Faux

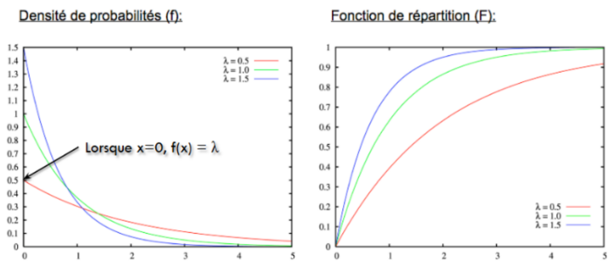
QRU 9 : B

A) Faux : on aurait pu hésiter entre loi binomiale et loi de Poisson, seulement ici on ne nous donne pas le nombre d'essais indépendants **n** !
B) Vrai : ici on est bien dans le cas d'une loi de Poisson avec des évènements rares et indépendants se réalisant dans un intervalle de temps. L'énoncé nous donne donc le taux moyen d'homicide λ = 156 / an. Cependant, on nous demande la probabilité d'observer + de 4 homicides par **semaine**. Il faut donc ramener le taux à 1 semaine : on sait qu'une année est composée de 52 semaines donc 156 / 52 = **3 homicides / semaine = λ**.
C) Faux : cf item B
D) Faux : elle n'est pas adaptée ici
E) Faux

QRU 10 : B

A) Faux : on est bien dans le cas d'une loi binomiale (avant approximation) cependant p = 0,05 et **n = 1000**
B) Vrai : les conditions d'approximation d'une loi binomiale en loi normale sont effectivement remplies : **np** = 1000 * 0,05 = 50 **> 5** ✓ et nq est forcément plus élevé encore (car q = 0,95 > p) donc **nq > 5** ✓ également. En approximant, la **moyenne** de la loi normale est égale à **np** soit **50**, et la **variance** est égale à **npq** (à ne pas confondre avec l'écart-type qui est égal à la racine carrée de npq) soit 1000 * 0,05 * 0,95 = **47,5**
C) Faux : la loi binomiale aurait pu potentiellement être approximée en loi de Poisson, mais toutes les conditions n'étaient pas réunies (notamment np = 50 donc > 5)
D) Faux
E) Faux

QRU 11 : E



A) Faux : μ = 1/λ tandis que $\sigma^2 = 1/\lambda^2$
B) Faux : pour la fonction de densité, lorsque x tend vers 0, f(x) tend vers **λ** et pas +∞
C) Faux : si et sa formule est $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$
D) Faux : de paramètre **λ** et non $e^{-\lambda}$ (sinon c'est vrai)
E) Vrai

QRU 12 : D

A) Faux
B) Faux
C) Faux
D) Vrai : l'espérance d'une loi de Poisson est égale à son taux lambda. Ici la loi concerne la probabilité d'un certain nombre de patients par **heure** et non pas par jour. 20 personnes viennent sur une journée de 8h, donc 20 / 8 = **2,5 patients / heure = λ = μ**
E) Faux

QRU 13 : C

A) Faux : la loi normale concerne les variables **continues** exclusivement
B) Faux : cf item A
C) Vrai : **+++**
D) Faux : elle est égale à **0**, c'est la variance/ l'écart-type qui est égale à 1
E) Faux

QRU 14 : C

A) Faux
B) Faux : un histogramme est utilisé pour des valeurs **discrètes** et non continues comme ici la glycémie
C) Vrai : ici on cherche un intervalle contenant 95% des individus c'est-à-dire **[m – 1,96s ; m + 1,96s]** avec m la moyenne et s l'écart-type. On arrondit 1,96 à **2**. On a **m = 10 et s = 2** → attention au piège variance/ écart-type ! On nous dit que la variance est de 4 et on sait que l'écart-type est sa racine carrée donc s = 2. On peut donc établir l'intervalle avec [10 – 2*2 ; 10 + 2*2] soit **[6 ; 14]**
D) Faux : cf item C
E) Faux

QRU 15 : D

A) Faux : elle n'est pas ordinale mais **quantitative discrète**
B) Faux : (563 + 1126) / 4158 correspond à la probabilité d'avoir **maximum** 1 patient par tranche horaire (0 ou 1)
C) Faux : X correspond au **nombre** de venues par tranche horaire, c'est donc une variable aléatoire discrète, et plus précisément c'est le schéma classique de la **loi de Poisson** (nombre d'évènements par intervalle de temps) → on ne parlera donc pas de ~~loi exponentielle~~ (qui est continue et s'occupe du temps entre deux évènements)
D) Vrai : on parle du **temps moyen entre deux venues consécutives**, donc ici c'est bien la **loi exponentielle** qu'il faut utiliser. On nous demande le temps moyen entre 2 évènements, ce qui correspond donc à la moyenne ou **l'espérance**. Pour une loi exponentielle **$\mu = 1/\lambda$** et comme dit dans l'énoncé $\lambda = 2$ donc $\mu = ½ =$ **0,5 heure** ce qui équivaut à **30 minutes**
E) Faux

QRU 16 : B

A) Faux : ça c'est la **loi de Poisson**
B) Vrai : ce sont bien toujours les paramètres d'une loi normale centrée réduite **+++** (mais attention pas forcément d'une loi normale classique)
C) Faux : dans [μ - 1,96 σ ; μ + 1,96 σ], on comptabilise environ **95%** de la population
D) Faux : [μ - 2,6 σ ; μ + 2,6 σ], on comptabilise environ **99%** de la population
E) Faux

QRU 17 : C

A) Faux : c'est une variable aléatoire **discrète**
B) Faux : ici on est dans le schéma d'une loi de Poisson et qui plus est la loi normale s'occupe des variables aléatoires continues (et l'approximation n'est pas possible ici)
C) Vrai
D) Faux : pour calculer le temps moyen entre 2 venues consécutives il faut passer par la loi exponentielle et calculer son espérance qui est égale à $\mu = 1/\lambda$ soit $\mu = ½ = 0{,}5$ heure soit 30 minutes (cf QRU 15 item D)
E) Faux

QRU 18 : E

A) Faux : dans l'intervalle [μ - σ ; μ + σ] on comptabilise environ **68%** des individus d'une population
B) Faux : cf item A
C) Faux : dans l'intervalle [μ - 2,6 σ ; μ + 2,6 σ] on comptabilise environ **99%** des individus d'une population
D) Faux : cf item C
E) Vrai

QRU 19 : C

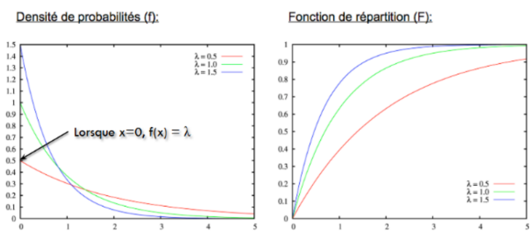
A) Faux
B) Faux
C) Vrai : le **nombre** moyen de patients par heure est distribué selon une **loi de Poisson** de paramètre λ = 3. On cherche le temps où il ne travaillera pas sur une semaine → attention au piège ! ++ même si on parle de temps (donc on pourrait penser à une loi exponentielle) ce n'est pas le temps entre 2 évènements consécutifs ! En réalité on cherche la probabilité qu'il ne reçoive aucun patient (donc k=0) en une heure multiplié par le nombre d'heures qu'il travaille dans la semaine. On calcule donc premièrement **la probabilité qu'il ne reçoive aucun patient en 1h** (donc k=0) : $P(X=0)=\frac{\lambda^k \times e^{-\lambda}}{k!}=\frac{3^0 \times e^{-3}}{0!}$ soit d'après l'énoncé $\frac{1 \times 0{,}05}{1}=0{,}05$. Il faut ensuite mettre cette probabilité non plus à l'échelle d'une heure mais **d'une semaine** de travail qui équivaut à 5j * 6h = 30 heures. **0,05 * 30 = 1,5 heure** ce qui équivaut donc à **90 minutes** de temps durant lequel il ne recevra pas de patients (= il ne travaillera pas)
D) Faux
E) Faux

QRU 20 : A

A) Vrai : l'intervalle [130 ; 170] correspond à **[μ - 2σ ; μ + 2σ]** (ou [μ - 1,96σ ; μ + 1,96σ] c'est pareil) qui comptabilise bien environ **95%** de la population
B) Faux : cf item A
C) Faux : il y a donc 95% des individus avec un QI entre 130 et 170, ce qui veut dire que les 5% restants sont soit en dessous de 130 soit au-dessus de 170. Comme la loi normale est **symétrique**, il y a **2,5% des individus en dessous de 130** et **2,5% des individus au-dessus de 170**, pas 5%
D) Faux : cf item C
E) Faux

QRU 21 : E

A) Faux : μ = 1/λ tandis que $\sigma^2 = 1/\lambda^2$
B) Faux : pour la fonction de densité, lorsque x tend vers 0, f(x) tend vers **λ** et pas +∞
C) Faux : si et sa formule est $F(x)= 1 - e^{-\lambda x}$
D) Faux : de paramètre **λ** et non √λ (sinon c'est vrai)
E) Vrai



QRU 22 : C

A) Faux : 130 est la borne inférieure de l'intervalle [130 ; 150] qui correspond à [μ - σ ; μ + σ] → cet intervalle comporte environ 68% des hommes, ce qui veut dire que les 32% restant se trouvent en dehors de cet intervalle. Comme la répartition est symétrique, il y a 32/2 = **16% en dessous de 130** et **16% au-dessus de 150** et non pas ~~moins de 5%~~
B) Faux : cf item A → il y a donc environ **16%** des hommes avec une concentration d'hémoglobine supérieure à 150, ce qui est inférieur à 20%
C) Vrai : l'intervalle [120 ; 140] correspond bien à l'intervalle [μ - σ ; μ + σ] qui comptabilise 68,2% des individus
D) Faux : 160 correspond à la borne supérieure de l'intervalle [100 ; 160] qui est proche de l'intervalle [μ - 2,58σ ; μ + 2,58σ] qui comptabilise 99% des individus mais aussi de l'intervalle [μ - 3,30σ ; μ + 3,30σ] qui comptabilise 99,9% des individus. Dans les deux cas, la proportion des femmes avec une concentration d'hémoglobine supérieure à 160 n'est pas de ~~1%~~ mais est bien **inférieure à 1%** (0,5% au maximum, voire 0,05%)
E) Faux

QRU 23 : D

A) Faux
B) Faux
C) Faux : on ne peut pas approximer par la loi de Poisson car **une condition n'est pas remplie** : np = 0,05 * 300 = **15 > 5 ×**
D) Vrai : nous sommes face à une loi binomiale. Pour l'approximer en loi de Poisson, il faut remplir les conditions suivantes : n > 50 ✓ ; p ≤ 0,10 ✓ ; np < 5 ×. Comme une condition n'est pas remplie on ne peut pas approximer
E) Faux

QRU 24 : C

A) Faux : une variable peut rester aléatoire même si elle dépend d'une autre variable
B) Faux : elle dépend du médicament mais ça ne l'empêche pas d'être aléatoire
C) Vrai : la concentration est bien une variable aléatoire quantitative continue
D) Faux : le délai d'apparition est également une variable aléatoire quantitative **continue**, pas discrète
E) Faux

<u>QRU 25</u> : D *(un peu hors programme selon moi…)*

A) <u>Faux</u>
B) <u>Faux</u>
C) <u>Faux</u>
D) <u>Vrai</u> : on cherche la probabilité que le délai d'apparition soit supérieur à 72min, soit **P (D > 72)**. Pour trouver la réponse, il faut d'abord **centrer réduire la loi normale** (de moyenne μ = 75 et d'écart-type s = 12). Pour cela on utilise la formule : $Z = \frac{72-\mu}{s} = \frac{72-75}{12} = \frac{-3}{12} = -0{,}25$. On cherche donc **P (Z > -0,25).** Par symétrie de la loi normale, c'est égal à P (Z ≤ 0,25), qui peut se lire directement dans la table de la loi normale centrée réduite. Elle fonctionne comme celles les tables des tests statistiques : on cherche 0,2 sur les colonnes et 0,05 sur les lignes : on trouve environ **0,60**. La réponse finale est donc **P (D > 72) = P (Z > -0,25) = P (Z ≤ 0,25) = 0,60 = 60%**.
E) <u>Faux</u>

Intégrale $F(t)$ de la Loi Normale Centrée Réduite $\mathcal{N}(0;1)$.

$$F(t) = P(X \le t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	$\boxed{0.5987}$	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916